分析-1 Lecture Notes

Instructor: 归斌
Notes Taker: 李颐

Qiuzhen College, Tsinghua University

2022 Fall

记号约定

iff	当且仅当
存在	存在
存在!	唯一存在
对于任意	对任意的
$A := B$	定义 A 为 B
$\wedge$	且
$\vee$	或
$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$

目录

第一章 集合的基本概念

1.1 集合的概念

定义 1.1.1. 集合, 简称集, 是一个基本的数学模型, 指具有某种特定性质的事物的总体, 集合里的事物称作元素, 它们可以是任何类型的数学对象, 数字, 符号, 变量, 空间中的点, 线, 面, 甚至是其他集合.

注记. 我们一般通过列出元素满足的某些性质定义集合, 如 $\{x|x \geqslant 2\}$. 注意到, 我们在 '|' 之前并没有给出 x 所在的集合, 这种对元素不加限制的概括会导致罗素悖论. 于是, 我们约定通过给出条件构造的集合要先验的在 '|' 前给出元素所取自的集合, 如 $\{x \in \mathbb{R}|x \geqslant 2\}$. 于是由于 '所有集合' 只组成类, 不组成集合, 这便避免了罗素悖论. (读者注意即可, 本讲义有时仍然会省略.)

以下是我们已熟知的集合运算:

- $A \cap B = \{x|x \in A \wedge x \in B\}$;
- $A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\}$;
- $A \setminus B = \{x \in A|x \notin B\}$.

定义 1.1.2. 对集合族 $\mathcal{A}$ (使得 存在X : 对于任意$A \in \mathcal{A}$, 有 $setX$), 可以定义

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \in X \big| 存在A \in \mathcal{A} : x \in A\};$$

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \in X \big| 对于任意A \in \mathcal{A}, x \in A\}.$$

亦可用指标集的形式, 若 对于任意$i \in \mathcal{I}$, A_i 是一个集合, 则定义

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i = \{x \in X \big| 存在i \in \mathcal{I} : x \in A_i\};$$

$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i = \{x \in X \big| 对于任意i \in \mathcal{I}, x \in A_i\}.$$

例子.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_{>1}}\left(0,1-\frac{1}{n}\right]=(0,1).$$

公理 1.1.3. 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为集合, 则笛卡尔积

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\left\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\middle|i\in\mathbb{Z}\cap[1,n]\right\}$$

存在, 其中 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\Leftrightarrow\left(\text{对于任意}i\in\mathbb{Z}\cap[1,n],a_i=b_i\right)$.

接下来我们定义函数, 又称为映射. 来看关系的定义.

1.2 映射

定义 1.2.1. 若 A,B 为集合, 则 $A\times B$ 中的一个子集 R 称为 A 到 B 的一个**关系**.

如果对关系加上一些限制条件, 就得到了函数.

定义 1.2.2. A 到 B 的一个关系称为**函数** (映射), 若其满足

$$\text{对于任意}a\in A,\text{存在}!b:b=f(a).$$

将这样的函数记作 $f:A\to B$, 并将 $b=f(a)$ 定义为 $(a,b)\in f$.

附注. 读者可尝试用集合论的语言来定义单射, 满射, 双射, 并证明对于 $f:A\to B$ 有以下命题:

- f 为单射 $\iff$ 存在$(g:B\to A):g\circ f=\mathrm{id}_A$;
- f 为满射 $\iff$ 存在$(g:B\to A):f\circ g=\mathrm{id}_B$ (对于无限集, 这需要选择公理);
- f 为双射 $\iff$ 存在$(g:B\to A):g\circ f=\mathrm{id}_A\wedge f\circ g=\mathrm{id}_B$.

例子. 令 A 是一个集合, 则函数

$$x:\begin{array}{l}\mathbb{Z}^+\to A\\ n\mapsto x_n\end{array}$$

可以称作 A 中的一个序列, 记为 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$.

1.3 集合上的序关系与势

定义 1.3.1. A 到自身的一个关系 R 称为 A 上的一个关系.

定义 1.3.2. 对 $a\in A,b\in B$, 若 $(a,b)\in R$, 记作 aRb.

定义 1.3.3. A 上的一个关系 '$\leqslant$' 被称为**偏序关系**, 若对任意 $a,b,c\in A$ 满足

- 自反性: $a\leqslant a$; 和
- 反对称性: $a\leqslant b\wedge b\leqslant a \implies a=b$; 和
- 传递性: $a\leqslant b\wedge b\leqslant c \implies a\leqslant c$.

一个偏序 '$\leqslant$' 称为**全序**, 若它额外满足对任意 $a,b\in A$, 有 $(a\leqslant b\vee b\leqslant a)$. 通俗的说, 就是 A 中任意两个元素都可以 '比大小'.
配备了这样一个偏序 (全序) 关系的集合称为**偏序集** (**全序集**).

例子.

- 一个集合的所有子集之间有偏序 '$\subseteq$';
- 若定义 $(a,b)\leqslant(a',b') \iff a\leqslant a'\wedge b\leqslant b'$, 则 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 为偏序集;
- $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ 上的 '$\leqslant$' 为全序.

定义 1.3.4. '$\sim$' 称为一个**等价关系**, 若其满足

- 自反性: $a\sim a$; 和
- 对称性: $a\sim b \iff b\sim a$; 和
- 传递性: $a\sim b\wedge b\sim c \implies a\sim c$.

例子. 三角形的全等关系构成等价关系.

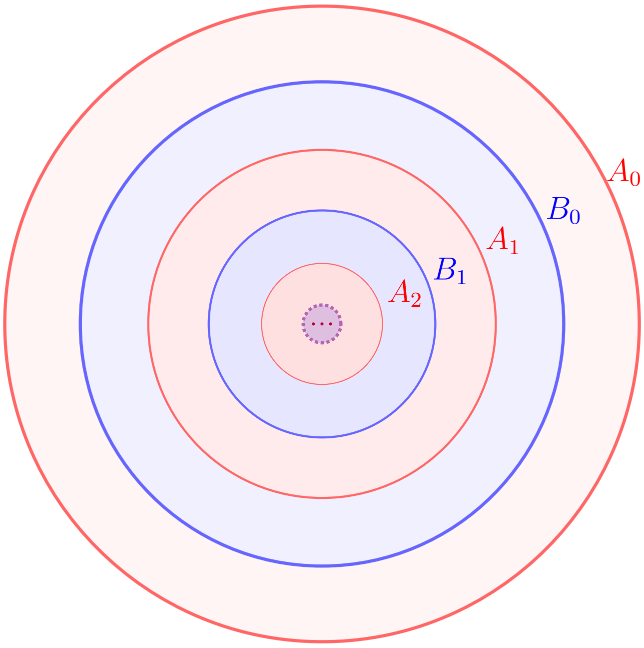
定义 1.3.5. 若集合 A 与 B 两者之间存在双射, 它们被称为有相等的**势**, 又记作 $|A|=|B|$. 若 A 与 (B 的某个子集) 之间存在双射, 我们称 A 的势小于等于 B 的势, 记作 $|A|\leqslant|B|$.

附注. 若 $f:A\to B$ 为单射, 则 $f:A\to f(A)$ 为双射, 即 $|A|=|f(A)|$, 于是 $|A|\leqslant|B|$. 若 $f:A\to B$ 为满射, 利用选择公理, 存在单射 $g:A\to B$, 于是有 $|B|\leqslant|A|$.

定理 1.3.6 (Schröder-Bernstein)**.** $|A|\leqslant|B|\wedge|B|\leqslant|A| \implies |A|=|B|$.

证明: 由题设, 存在双射 $f:A\to f(A)\subseteq B$ 与双射 $g:B\to g(B)\subseteq A$. 下面我们构造辅助函数时只需要考虑 A 与其中子集. 考虑 $\underbrace{g\circ f}_{\text{设为}h}:A\to\underbrace{g(f(A))}_{\text{设为}A_1}\subseteq\underbrace{g(B)}_{\text{设为}B_0}\subseteq\underbrace{A}_{\text{记为}A_0}$.

见上图, A_0 表示最大的红圆圈所包含的区域, B_0 表示最大的蓝圆圈所包含的区域. 我们更可对 $n\in\mathbb{N}$ 归纳定义 $A_{n+1}=h(A_n)$ 和 $B_{n+1}=h(B_n)$ (图片表达能力有限请见谅). 为



了构造 $A_0 \to B_0$ 的双射, 我们直观上希望把 $A_0 \setminus B_0$ (最大红圆所围之区域扣除掉最大蓝圆所围之区域) 映到 $A_1 \setminus B_1$ (第二大红圆所围之区域扣除掉第二大蓝圆所围之区域), 再把里面的这些区域像 '希尔伯特旅馆' 那样不断 '往中心推进'. 别的元素不动. 我们能够自然构造映射 $\sigma : A_0 \to B_0$ 如下,

$$x \mapsto \begin{cases} h(x), & \text{若存在某} n \in \mathbb{N} \text{使得} x \in A_n \setminus B_n; \\ x, & \text{若不然}. \end{cases}$$

证明 σ 是良定义双射在图像辅助下非常显然. 然后, $g^{-1} \circ \sigma : A \to B$ 直接就是个双射, 证毕. $\square$

附注. 在数学中, 有些证明的思想是值得注意的, 因为它们被反复运用, 也因此更容易通过理解的方式来记忆. 不过该定理并不属于此类, 我们只要求各位同学写过证明即可, 不要求记忆.

例子. 若 $a < b$, 则 $(0,1)$ 与 (a,b) 等势.

证明: 直接构造双射

$$f : \begin{matrix} (0,1) \to (a,b) \\ x \mapsto (b-a)x + a \end{matrix}.$$

$\square$

例子. 考虑 $g(x) = \tan x$, 则 $g : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ 是双射, 进一步可以得到 $\mathbb{R}$ 与任何开区间等势. 再注意到 $\big|(a,b)\big| \leqslant \big|[a,b]\big| \leqslant |\mathbb{R}|$, 可得任何区间与 $\mathbb{R}$ 等势.

附注. 我们目前尚未给出三角函数的严格构造.

命题 1.3.7. *无穷可数集与 $\mathbb{N}$ 等势.*

附注. 可以把可数集理解为从左至右排成一个序列的集合.

定理 1.3.8. *可数个可数集的并可数.*

证明: 对 $i \in \mathbb{Z}^+$, 设 $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \cdots\}$ 并将它们排成如下所示的无穷矩阵. 从左上到右

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & \cdots \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & \cdots \\
 & \nearrow & & \nearrow & & & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & \cdots \\
 & \nearrow & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

下依次是对角线 (分别满足 $x + y = 1, 2, \ldots$). 第 i 次沿着对角线从左下到右上列出了 i 个数. 如此一来便列出了

$$\bigcup_{i \in \mathbb{Z}^+} A_i = \{x \in X \big| 存在 i \in \mathbb{Z}^+ : x \in A_i\}$$

的所有元素. □

例子. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ *都是无穷可数集.*

证明: 将整数分成自然数和负整数, $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_-$, 而 $|\mathbb{Z}_-| = |\mathbb{N}|$, 因此有 $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$. □

注记. $\mathbb{Q}$ 的可数性留作练习.

例子. $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = \mathbb{N}$.

公理 1.3.9. *若 A 是一个集合, 则存在集合 $2^A = \{A$ 的所有子集 $\}$, 称其为幂集 (Power Set).*
因此, 若 A,B 为集合, 则存在集合 $B^A = \{$ 由 A 映到 B 的所有函数 $\} \subseteq 2^{A \times B}$.

命题 1.3.10. 2^A *与* $\{0, 1\}^{|A|}$ *等势.*

证明: 对任意 $E \subseteq A$, 定义特征函数 $\chi_E(x)$:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, 若 x \in E; \\ 0, 若 x \notin E. \end{cases}$$

则映射

$$\Phi : \begin{aligned} 2^A &\to \{0, 1\}^{|A|} \\ E &\mapsto \chi_E(x) \end{aligned}$$

为双射. □

练习. 若 A,B 有限, 则 $\left|2^A\right| = 2^{|A|}$,$\left|B^A\right| = |B|^{|A|}$.

附注. $\overbrace{B \times B \times \cdots \times B}^{n}$ 与 $B^{\{1,2,\ldots,n\}}$ 等势. 另外, 因 $B^{\mathbb{N}}$ 可看成 $B \times B \times \cdots$, $B^{\mathbb{N}}$ 也被记作 B^{ω}.

定理 1.3.11. $|A| < \left|2^A\right|$, 即 $|A| \leqslant \left|2^A\right|$, 且 $|A| \neq \left|2^A\right|$, 因此, 若 $|B| \geqslant 2$, 则 $|A| < \left|B^A\right|$.

证明: 设映射 $F : A \to 2^A, a \mapsto \{a\}$, 则 F 为单射, 故 $|A| \leqslant \left|2^A\right|$. 下推若存在双射 $G : A \to 2^A$ 则导出矛盾. 定义 A 的子集 $C = \left\{x \in A \middle| x \notin G(x)\right\}$, 则 对于任意$a \in A$ 有 $C \neq G(a)$. 否则, 若存在 $C = G(a)$, 则 $a \notin G(a) \iff a \notin C \iff a \in G(a)$, 矛盾. 故 G 非满射. □

例子. $\left|[0,1]\right| = 2^{\mathbb{N}} = \left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right|$, 故 $[0,1]$ 不可数.

注记. 一个可行的解释是考虑 [0,1] 中元素在二进制下的表示. 每个元素对应二进制小数点后每一位 0 和 1 的选择, 根据此对应可得上式. 但这里有一个瑕疵, 即一个相同的数可能有不同的二进制表示, 如 0.1 和 $0.0111\cdots$. 因此, 一个更为严谨漂亮的证明将在下文展示.

命题 1.3.12. 若 $A \cap B = \varnothing$ 则 $\left|X^A \times X^B\right| = \left|X^{A \cup B}\right|$.

证明: 直接构造双射 $\Phi : X^{A \cup B} \to X^A \times X^B$, $f \mapsto (f|_A, f|_B)$. □

命题 1.3.13. 对 $n = 2, 3, 4, \cdots$, 记 $\left|n^{\mathbb{N}}\right| = \left|\{1, \cdots, n\}^{\mathbb{N}}\right|$, 则 $|n^{\mathbb{N}}| = \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|$, 即 $\left|n^{\mathbb{N}}\right|$ 与 n 无关.

证明: 显然 $\left|2^{\mathbb{N}}\right| \leqslant \left|3^{\mathbb{N}}\right| \leqslant \cdots \leqslant \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|$, 故只需要证明 $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| \leqslant |2^{\mathbb{N}}|$.
由前述命题, 有 $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| \leqslant 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} = \left|2^{\mathbb{N}}\right|$, 故 $\left|2^{\mathbb{N}}\right| = \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|$. □

例子. 考虑 $[0,1]$ 中的元素在十进制下的表示可得一个 $10^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ 的满射 ($0.0999\cdots$ 与 $0.1000\cdots$ 对应相同实数), 而它限制在 $9^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ 时是单射. 故有 $|9^{\mathbb{N}}| \leqslant \left|[0,1]\right| \leqslant \left|10^{\mathbb{N}}\right| = \left|9^{\mathbb{N}}\right|$, 故 $\left|[0,1]\right| = \left|10^{\mathbb{N}}\right| = \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|$.

第二章　数域

2.1　域, 序关系与确界

定义 2.1.1. **域**, 即其上定义了二元运算加法 '+' 和乘法 '×' 并满足以下所有性质的集合:

- 对于任意$x, y, z, x + (y + z) = (x + y) + z$;
  对于任意$x, y, x + y = y + x$;
  存在0 : 对于任意$x, 0 + x = x$;
  对于任意x, 存在$(-x) : x + (-x) = 0$.

- 对于任意$x, y, z, x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$
  对于任意$x, y, x \times y = y \times x$
  存在$1 \neq 0$: 对于任意$x, x \times 1 = 1$;
  对于任意$x \neq 0$, 存在$x^{-1} : x \times x^{-1} = 1$;
  对于任意$x, y, z, x \times (y + z) = x \times y + x \times z$.

例子. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}.\mathbb{C}$ 是域. 其中 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 分别配备了二元关系后是全序集, 且额外具有以下性质:

- 对于任意$a, b, c, a \leqslant b \iff a + c \leqslant b + c$;

- 对于任意$a, b, a, b \geqslant 0 \implies ab \geqslant 0$;

- 对于任意$a > 0$, 对于任意b, 存在$n \in \mathbb{Z}^+ : na > b$.

定义 2.1.2. 令 $(A, \leqslant)$ 为偏序集, $E \subseteq A$. 若 E 有最小上界 $a \in A$, 即

(1) a 是 E 的上界 (对于任意$e \in E$ 有 $e \leqslant a$);

(2) 若 $b \in A$ 也是 E 的上界, 则 $a \leqslant b$,

则记 $a = \sup E$, 称为 E 的**上确界**.

命题 2.1.3. 上确界若存在则唯一.

证明: 若 a, b 都是 E 的最小上界, 则 $b \leq a \wedge a \leq b$. 由反对称性, $a = b$. □

附注. 最大下界定义类似, 记为 $\inf E$.

公理 2.1.4. *$\mathbb{R}$ 中任意有上界非空子集 E 存在上确界.*

命题 2.1.5. *$\mathbb{R}$ 中任意有下界非空子集 E 存在下确界.*

证明: $\inf E = -\sup(-E) = -\sup\left\{x \in \mathbb{R} \middle| -x \in E\right\}$. □

例子. *$\{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, \ldots\}$ 是 $\mathbb{Q}$ 中的有界递增列, 它在 $\mathbb{Q}$ 中无上确界, 但在 $\mathbb{R}$ 中有上确界 $\sqrt{2}$.*

例子.

- $\inf\left\{\frac{1}{n}\middle| n \in \mathbb{Z}^+\right\} = 0$;
- $\inf\left(3, 4\right] = 3$;
- $\inf\left\{3, 4\right\} = 3$.

例子. *若 $\mathcal{A} \subseteq 2^A$, 则 $\mathcal{A}$ 有上和下确界*

$$\sup \mathcal{A} = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B,$$
$$\inf \mathcal{A} = \bigcap_{B \in \mathcal{A}} B.$$

注记. (在承认阿基米德公理的前提下) 若干常见公理与确界公理等价, 其中重要的有

- 闭区间套公理;
- Bolzano-Weierstrass 性质.

2.2 广义实数与复数

定义 2.2.1. 广义实数, 即在实数基础上引入 $+\infty$ 和 $-\infty$ 所构成的集合. 我们通常作以下约定. 对于任意$x \in \mathbb{R}$,

$$-\infty < x < +\infty,$$
$$x \pm \infty = \pm\infty,$$
$$\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0.$$

对于任意$x \in \mathbb{Z}^+$,

$$x \cdot (+\infty) = +\infty,$$

对于任意$x \in \mathbb{R}_-$,

$$x \cdot (+\infty) = -\infty.$$

令 $E \subseteq \mathbb{R}$ 非空. 若 E 无上界 (即 对于任意$a \in A$, 存在$e \in E : e > a$), 则记 $\sup E = +\infty$. 若 E 无下界, 记 $\inf E = -\infty$.

定义 2.2.2. 复数域. 作为集合 $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, 定义 $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ 和 $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, 则 $(\mathbb{C}, +, \times)$ 是一个域. 把 $(a, 0) \in \mathbb{C}$ 视作 $a \in \mathbb{R}$, 则 $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. 记 $i = (0, 1)$, 则 $(a, b) = a + bi$.

第三章 极限

3.1 度量空间

定义 3.1.1. 令 X 是集合, 配有函数 $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. (X,d) 是**度量空间 (metric space)**, 若对任意 $x,y,z \in X$ 以下性质成立:

- 对称性: $d(y,x) = d(x,y)$; 和
- 正定性: $d(x,y) = 0 \iff x = y$; 和
- 三角不等式: $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

定义 3.1.2. 在先前的基础上, 我们定义 $B(x,r) = \{y \in X | d(y,x) < r\}$.

注记. 任何度量空间 (X,d) 满足 Hausdorff 性质, 即对任意不同 $x,y \in X$, 存在 $r_1, r_2 > 0$ 使得 $r_1 + r_2 < d(x,y)$, 因此 $B(x,r_1) \cap B(x,r_2) = \varnothing$.(否则, 若有公共元素 z, 则由度量空间的假设得 $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) \implies r_1 + r_2 \geqslant d(x,y)$, 矛盾). Hausdorff 性质可以理解为, 任选两个不同的点, 不存在一个离两个点都非常近的点).

例子. *$\mathbb{R}$ 中有度量 $d(x,y) = |x-y|$. $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{C}^n$ 中分别都有如下的三个度量:*
对于任意$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$,

- $d_1(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$;
- $d_2(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2| + \cdots + |x_n-y_n|$;
- $d_3(x,y) = \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_n - y_n|$.

例子. *设对任意 $1 \leqslant i \leqslant n$, (X_i, d_i) 是度量空间, 我们又可以在 $X = X_1 \times X_2 \times \cdots times X_n$ 上定义三个度量:*
对于任意$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$,

- $D_1(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (d_i(x_i,y_i))^2}$;

- $D_2(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |d_i(x_i, y_i)|$;
- $D_3(x,y) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i(x_i, y_i)$.

特别地, 对于 (X, D_3), 我们有 $B_X(x,r) = B_{X_1}(x_1,r) \times B_{X_2}(x_2,r) \times \cdots \times B_{X_n}(x_n,r)$.

我们发现在同一个空间上可以配备很多不同的度量. 那么, 在这些度量下进行的分析是否等价? 以下将定义等价度量的概念. 在等价的度量下得到的度量空间大体上是没有区别的.

定义 3.1.3. 设 d_1, d_2 是 X 上的两个度量. 称 d_1, d_2 等价当且仅当 存在$\alpha, \beta > 0$: 对于任意$x, y \in X, d_1(x,y) \leqslant \alpha d_2(x,y) \wedge d_2(x,y) \leqslant \beta d_1(x,y)$.

例子. 前述的 $\mathbb{C}^n$ 上有三个度量 d_1, d_2, d_3. 注意到

$$\text{对于任意}x, y \in \mathbb{C}^n, d_3(x,y) \leqslant d_1(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant n \cdot d_3(x,y),$$

因此, 这三个度量是等价的.

例子. 设 $X = X_1 \times X_2$, 则 $D_1(x,y)$ 与 $\sqrt{2d(x_1,y_1) + \frac{1}{100} d_2(x_2,y_2)}$ 是等价的.

附注. 由上可见, 一个度量空间上可以配备很多不同但等价的度量. 这其中本质的共同点是什么? 剥去表面的度量形式, 就能得到我们以后会提到的拓扑空间.

3.2 极限

定义 3.2.1. 令 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ 为 (X, d) 中的一个数列, $x \in X$. 称 (x 为 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ 的**极限**) 或 ($\{x_n\}_{n \in Z_+}$ **收敛**于 x), 若

$$\text{对于任意}\varepsilon > 0, \text{存在}N \in \mathbb{Z}^+ : \text{对于任意}n \in \mathbb{Z}^+, \big(n \geqslant N \implies d(x_n, x) < \varepsilon\big),$$

也就是

$$\text{对于任意}\varepsilon > 0, \text{存在}N \in \mathbb{Z}_+ : \{x_n | n \geqslant N\} \subseteq B(x, \varepsilon).$$

命题 3.2.2. 若 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+} \subseteq X$ 收敛, 则其极限唯一.

证明: 若 $x, y \in X$ 满足 $x_n \to x, y_n \to y$, 设 $r = d(x,y) > 0$, 则由 $\{x_n\}$ 收敛于 x 得 $\{x_n\}$ 在 $B\left(x, \frac{r}{2}\right)$ 外只有有限多个点. 同理,$\{y_n\}$ 在 $B\left(x, \frac{r}{2}\right)$ 外也只有有限多个点, 于是 $B\left(x, \frac{r}{2}\right) \cap B\left(y, \frac{r}{2}\right)$ 中包含无限多个点, 与两个球不交矛盾. □

例子.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

注记.

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \iff \lim_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0.$$

定义 3.2.3. X 中的子集 E **有界**, 若 存在$p \in X, R \in \mathbb{Z}^+ : E \subseteq B(p, R)$ (于是 R 中任意开球自然有界).

命题 3.2.4. *若 $q \in X, R > 0$, 令 $\delta = d(p, q)$, 则 $B(p, R) \subseteq B(q, R + \delta)$ (这说明集合是否有界与球心选取无关).*

证明: 若 $d(p, x) < R$, 则 $d(q, x) \leqslant \underbrace{d(p, q)}_{<\delta} + \underbrace{d(p, x)}_{<R} < R + \delta$. □

命题 3.2.5. *若 $E_1, E_2, \cdots, E_n \subseteq X$ 有界, 则 $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$ 在 X 中有界.*

命题 3.2.6. *若 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \subseteq X$, 且 $x_n \to x$, 则 $\{x_n\}$ 在 X 中有界.*

例子. *$x_n = n^2$ 在 $\mathbb{R}$ 中无界.*

定义 3.2.7. 若在 $\mathbb{Z}^+$ 中 $1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots$, 称 $\{x_{x_{n_k}}\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ 为 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 的一个子列.

例子. *$x_{n_k} = x_{k^2}$, 其中$k \in \mathbb{Z}^+$.*

命题 3.2.8. *若 $x_n \to x$, 则对任意子列 $\{x_{n_k}\} \in \mathbb{Z}^+$, 有 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = x$.*

证明:

$$\text{对于任意}\varepsilon > 0, \text{存在}N \in \mathbb{Z}^+ : \big(\text{对于任意}n \geqslant N, d(x_n, x) < \varepsilon\big).$$

由 $\{n_k\}$ 严格递增知对任意 $k \geqslant N$, 有 $n_k \geqslant N, d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$. 因此,$x_{n_k} \to x$. □

例子. *$x_n = (-1)^n$ 不收敛.*

证明: 若收敛, 则它的任意子列收敛到同一个数, 但 $x_{2k} \to 1$ 而 $x_{2k+1} \to -1$, 矛盾. □

命题 3.2.9. *令 $\{z_n\}$,$\{w_n\}$是 $\overset{\text{复}}{\text{实}}$ 数列, 其中 $z_n \to z, w_n \to w$. 那么*

- *$(z_n + w_n) \to (z + w)$;*
- *$z_n \cdot w_n \to z \cdot w$. 特别地,对于任意$\lambda \in \overset{\mathbb{C}}{\mathbb{R}}, \lambda z_n \to \lambda z$;*
- *若 对于任意$n, w_n \neq 0$, 且 $w \neq 0$, 则 $\dfrac{z_n}{w_n} \to \dfrac{z}{w}$;*
- *若 $\{z_n\}, \{w_n\} \subseteq \mathbb{R}$, 且 (对于任意$n, z_n \leqslant w_n$), 则 $z \leqslant w$.*

定理 3.2.10 (双边控制 Squeeze Lemma)**.** *若 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{z_n\} \subseteq \mathbb{R}$ 满足 (对于任意n,$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$), 而 $x_n \to C$ 且 $z_n \to C$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = C$.*

推论 3.2.11. 若 $0 \leqslant y_n \leqslant x_n$ 且 $x_n \to 0$, 则 $y_n \to 0$.

命题 3.2.12. 若 X 上度量 d_1,d_2 等价, 则 $x_n \xrightarrow{d_1} x \iff x_n \xrightarrow{d_2} x$.

命题 3.2.13. 设 X,Y 为度量空间,$\{(x_n,y_n)\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \subseteq X \times Y$, 则 $(x_n, y_n) \to (x, y) \iff (x_n \to x \wedge y_n \to y)$.

定义 3.2.14. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \subseteq \mathbb{R}$. 记 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \underset{-\infty}{+\infty}$, 若

$$\text{对于任意} M \in \mathbb{R}, \text{存在} N \in \mathbb{Z}_+ : \text{对于任意} n \geqslant N, \underset{x_n \leqslant M}{x_n \geqslant M}.$$

定义 3.2.15. 对于 $A \subseteq \mathbb{R}$ 和 $M \in \mathbb{R}$, 若 对于任意$x \in A, M \geqslant x$, 则称 M 为 A 的一个**上界**.
类似地, 若 对于任意$x \in A, M \leqslant x$, 则称 M 为 A 的一个**下界**.

定理 3.2.16 (确界原理)**.** 若 $A \subseteq \mathbb{R}$ 有界, 令 $\mathcal{M} = \{M \in \mathbb{R} \mid \text{对于任意} x \in A, M \leqslant x\}$, 则 存在!$\overline{M} \in \mathcal{M}$: 对于任意$M \in \mathcal{M}, \overline{M} \leqslant M$. 我们称这样的 $\overline{M}$ 为 A 的上确界, 记为 $\sup A$. 类似地, 可定义下确界 $\inf A$, 是 A 的下界, 并且是所有下界的一个上界.
特别地, 若 A 无上界, 则记 $\sup A = +\infty$; 而若 A 无下界, 则记 $\inf A = -\infty$.

定理 3.2.17 (单调收敛原理)**.** 令 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \subseteq \mathbb{R}$ 递增,$S = \sup\left\{x_n \middle| n \in \mathbb{Z}^+\right\}$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = S$.
(若$\{x_n\}$无上界,$S = +\infty$.)

我们已经知道一个不收敛的序列可以有两个收敛于不同数的子列, 且在某些情况下 (如在实数集内), 这两个命题是等价的. 下面我们不妨研究一个序列的任意收敛子列的极限相等可以推出什么.
先观察序列是否总有收敛子列.

定义 3.2.18. 称度量空间 (X, d) **列紧** (**Sequentially Compact**), 若其上每个序列都有收敛的子列.

定理 3.2.19. $\mathbb{R}$ 中任意有界闭区间与其上的度量 $d(x, y) = |x - y|$ 构成一个列紧的度量空间.

例子. $\mathbb{R}$ 和 $(0, 1)$ 都不是列紧的.

定理 3.2.20. 对于全序集 X, 任意一个无穷序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \subseteq X$ 都有一个单调的子列.

证明: 首先注意到单调包括两种情况: 单调递增和单调递减.
考虑命题 '对于任意$N \in \mathbb{Z}^+$, 存在$n \geqslant N : x_n = \sup\limits_{m \geqslant n} x_m$'.
若该命题不成立,则 存在$N \in \mathbb{Z}^+$: 对于任意$n \geqslant N, x_n < \sup\limits_{m \geqslant n} x_m = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$.
我们归纳构造一个 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$. 令 $n_1 = N$.
现假设我们已经构造了 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, 满足 $x_{n_1} \leqslant x_{n_2} \leqslant \cdots \leqslant x_{n_k}$.
由于 x_{n_k} 不是 $\{x_{n_k}, x_{n_k+1}, \dots\}$ 的上界, 故存在 $n_{k+1} > n_k$ 使得 $x_{n_{k+1}} > x_{n_k}$. 于是 $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k+1}}$ 递增. 如此归纳, 即可得原序列的一个递增子列.
若该命题成立,我们仍然可采取归纳构造的方式. $k = 1$ 的情况简单. 不妨假设我们已经构造了 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, 满足 $x_{n_1} \geqslant x_{n_2} \geqslant \cdots \geqslant x_{n_k}$, 且对任意 $1 \leqslant i \leqslant k$ 有 $x_{n_i} = \sup\limits_{m \geqslant n_i} x_m$. 由假设知存在 $n_{k+1} \geqslant n_k + 1$ 使得 $x_{n_{k+1}} = \sup\limits_{m \geqslant n_{k+1}} x_m$. 另一方面,$x_{n_k} \geqslant x_{n_{k+1}}$ 由前者的定义显然. 如此归纳, 我们就找到了一个 $\{x_n\}$ 的递减子列. □

定理 3.2.21 (Bolzano-Weierstrass)**.** *$\mathbb{R}$ 中的任意有界闭区间都是列紧的.*

证明: 对于 $\mathbb{R}$ 中任意有界闭区间 $[a, b]$ 上的无穷序列 $\{x_n\}$, 由定理定理 3.2.20知这个序列必有单调子列 $\{x_{n_k}\}$. 由定理 3.2.17又知该子列收敛于某 $x \in \mathbb{R}$. 由 对于任意$k \in \mathbb{Z}^+$ 知 $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$, 故 $x = \lim\limits_{k \to +\infty} x_{n_k} \in [a, b]$. 因此,$[a, b]$ 是列紧的. □

一个自然的问题是, 我们是否可以把这个命题推广到 $\mathbb{R}^n$ 上? 如下.

命题 3.2.22. *$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ 是列紧的.*

我们只需证明下述命题.

定理 3.2.23. *若 X, Y 是列紧的, 那么 $X \times Y$ 也是列紧的.*

证明: 对于序列 $\{x_n, y_n\}$, 存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 x, 又存在 $\{x_{n_k}\}$ 的子列 $\{x_{m_k}\}$ 它对应的 $\{y_{m_k}\}$ 收敛于 y. 从而 $\{(x_{m_k}, y_{m_k})\}$ 收敛于 (x, y). □

定理 3.2.24. *令 X 是列紧的, 而 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+} \subseteq X$, 则以下命题等价:*

- *$\{x_n\}$ 收敛;*
- *$\{x_n\}$ 中任意两个收敛子列收敛到同一个数.*

证明: 我们只需证明第二条命题能推出第一条命题, 因为反过来是显然的.
由 X 列紧, 存在 $\{x_n\}$ 的子列 $x_{n_k} \to x \in X$. 下证 $x_n \to x$.
若其不成立, 即 存在$\varepsilon > 0$: 对于任意$N \in \mathbb{Z}^+$, $\big($存在$n \geqslant N : d(x, x_n) \geqslant \varepsilon\big)$, 则存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足 对于任意$k \in \mathbb{Z}^+, d(x, x_{n_k}) > \varepsilon$. 但 X 是列紧的, 故存在 $\{x_{n_k}\}$ 的收敛子列 $\{x_{m_k}\}$, 由题设知其收敛于 x, 由 对于任意$k \in \mathbb{Z}^+, d(x, x_{m_k}) > \varepsilon$ 得矛盾.
因此,$\{x_n\}$ 是收敛的, 证毕. □

推论 3.2.25. $\mathbb{R}^n$ 中序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 收敛当且仅当它作为子集有界，且每个子列收敛到同一点.

练习. 若 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}\in\mathbb{R}$无上界，则 $\{x_n\}$存在递增的子列$\{x_{n_k}\}$趋向$+\infty$.
无下界　递减　$-\infty$

3.3 上极限和下极限

定义 3.3.1. 称 $x\in\mathbb{R}$ 是 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}\in\mathbb{R}$ 的一个**聚点**，若 $\{x_n\}$ 有子列趋于 $x\in[-\infty,+\infty]$. 所有聚点组成的集合记为 E.

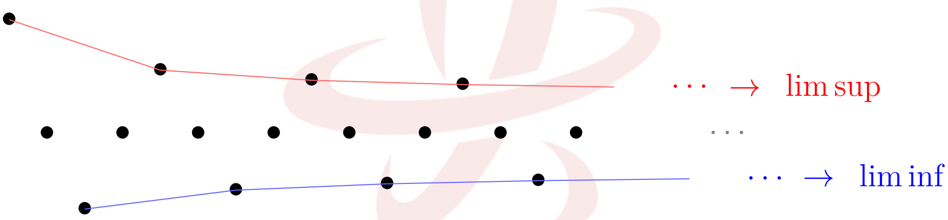
附注. 由练习第 3.2 节知 E 非空，无论序列是否有界.

定义 3.3.2. 对于 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}\in\mathbb{R}$，定义 $\{x_n\}$ 的上极限

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, x_n=\sup E,$$

定义 $\{x_n\}$ 的下极限

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n=\underline{\lim_{n\to+\infty}}\, x_n=\inf E.$$



练习. 令 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}\in\mathbb{R}$ 有界.

(1) 证明

$$\limsup_{n\to\infty} x_n\in E,$$
$$\liminf_{n\to\infty} x_n\in E.$$

(2) 令 $a_n=\sup\limits_{m\geqslant n} x_m$, $b_n=\inf\limits_{m\geqslant n} x_m$. 证明 $\{a_n\}$ 递减,$\{b_n\}$ 递增，且

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=\limsup_{n\to+\infty} x_n,$$
$$\lim_{n\to+\infty} b_n=\liminf_{n\to+\infty} x_n.$$

(3) 证明 $\{x_n\}$ 收敛 $\iff\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n=\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$.

附注. a_n 与 b_n 不一定在 $\{x_n\}$ 中.

例子.

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{Z}^+}\text{所对应的}b_n=\inf_{m\geqslant n}x_m\text{恒为}0.$$

3.4 柯西收敛的序列

定义 3.4.1. 度量空间 (X,d) 中的一个序列 $\{x_n\}$ 称为**柯西序列** (**Cauchy Sequence**), 若 对于任意$\varepsilon>0$, 存在$N\in\mathbb{Z}^+$: 对于任意$m,n\geqslant N, d(x_m,x_n)<\varepsilon$.

命题 3.4.2. *X 中任意收敛序列 $\{x_n\}$ 是柯西列.*

证明: 设 $x_n\to x$, 则

$$\text{对于任意}\varepsilon>0,\text{存在}N\in\mathbb{Z}^+:\left(\text{对于任意}m,n\geqslant N, d(x_m,x)<\frac{\varepsilon}{2}\wedge d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

于是 $d(x_m,x_n)\leqslant d(x_m,x)+d(x_n,x)<\varepsilon$. □

命题 3.4.3. *柯西列一定有界.*

定义 3.4.4. 度量空间 (X,d) 称为**完备的** (**complete**) 或**柯西完备的** (**Cauchy Complete**), 若 X 中的任意柯西列收敛.

柯西列的重要性体现于级数的应用. 下面我们引入级数.

定义 3.4.5. 形如 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}a_i$ 的 '求和', 其中 a_i 是实 (复) 数, 称为级数.

设 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$. 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=S$, 称 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}a_i$ 收敛到 S.

若 $a_i\in\mathbb{R}$ 且 $S_n\to\underset{-\infty}{+\infty}$, 我们称 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}a_i$ 发散到 $\underset{-\infty}{+\infty}$.

命题 3.4.6. *若 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}a_i$ 收敛, 则 $\lim\limits_{i\to+\infty}a_i=0$.*

证明: 考虑部分和数列

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i, n\in\mathbb{Z}^+.$$

S_n 收敛故为柯西列, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{Z}^+$ 使得对任意 $n>N$, 取 $m=n-1\geqslant N$, 有

$$|a_n|=|S_n-S_m|<\varepsilon.$$

□

例子. 若 $z \in \mathbb{C}$ 满足 $|z| < 1$, 则 $\lim\limits_{n \to +\infty} z^n = 0$.

证明: 若 $z = 0$, 结论显然成立.
若 $z \neq 0$, 则 $0 < |z| < 1$. 记 $|z| = \dfrac{1}{1+\delta}$, 其中 $\delta > 0$, 有

$$(1+\delta)^n = 1 + n\delta + \cdots \geqslant 1 + n\delta.$$

因此,

$$0 < |z^n| \leqslant \underbrace{\frac{1}{1+n\delta}}_{\to 0},$$

则 $d(z^n, 0) = |z^n| \to 0$, 故 $z^n \to 0$. □

例子. 令 $z \in \mathbb{C}_{\neq 0}$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ 收敛当且仅当 $|z| < 1$. 若其收敛, 则有 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$.

证明: 令

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z},$$

当 $|z| < 1$ 时 $z^{n+1} \to 0$, 则 $S_n \to \dfrac{1}{1-z}$; 当 $|z| \geqslant 1$ 时 $z^n \nrightarrow 0$, 故 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ 不收敛. □

命题 3.4.7. 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛.
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛, 且若 $\lambda \in \mathbb{C}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n = \lambda \cdot \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 也收敛.

例子. 调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散.

证明: 令 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. 我们要证 $\{S_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ 不是柯西列, 即证

$$\text{存在}\varepsilon > 0 : \left(\text{对于任意}N \in \mathbb{Z}^+, \text{存在}n > m \geqslant N : |S_n - S_m| = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n} > \varepsilon\right).$$

对任意 $N \in \mathbb{Z}^+$, 取 $k \in \mathbb{Z}^+$ 足够大使 $2^k \geqslant N$. 设 $m = 2^k, n = 2^{k+1}$, 则

$$\begin{aligned} |S_n - S_m| &= \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \cdots + \frac{1}{2^k+2^k} \\ &> \underbrace{\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}}_{2^k} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

定理 3.4.8. 若度量空间 (X,d) 中序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 为柯西列且有收敛子列, 则 $\{x_n\}$ 收敛. 也就是说, 每个列紧度量空间都柯西完备.

证明: 令 $\{x_n\}$ 有子列 $x_{n_k}\to x$. 下证 $x_n\to x$. 任取 $\varepsilon>0$.

$$\begin{aligned}\text{存在}N:&\left(\text{对于任意}n,m\geqslant N, d(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}\right),\\ \text{存在}M:&\left(\text{对于任意}k\geqslant M, d(x_{n_k},x)<\frac{\varepsilon}{2}\right).\end{aligned}$$

令 $k=\max\{N,M\}$, 则 $n_k\geqslant k\geqslant N,M$. 现对任意 $n\geqslant N$,

$$d(x_n,x)\leqslant d(x_{n_k},x_n)+d(x_{n_k},x)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

□

推论 3.4.9. $\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^n$ 是完备的度量空间.

证明: 考虑 $\mathbb{R}^n$ 中任意柯西列. 由柯西列有界, 它必包含于某 $\underbrace{[-N,N]\times[-N,N]\times\cdots\times[-N,N]}_{n}$ 中, 其中 $N\in\mathbb{Z}^+$, 即该柯西列包含于某列紧空间, 则其收敛. □

例子 (([0,1] 中的元素在十进制下的表示))**.** 对任意 $n\in\mathbb{Z}^+$, 取 $a_n\in\{0,1,2\cdots,9\}$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{10^n}$ 对应部分和

$$S_n=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}$$

是柯西列.

证明: 不妨设 $m\leqslant n$.

$$|S_n-S_m|=\left|\frac{a_{m+1}}{10^{m+1}}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}\right|\leqslant 9\cdot\left(\frac{1}{10^{m+1}}+\cdots+\frac{1}{10^n}\right)<\frac{9}{10^{m+1}}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{10}}=\frac{1}{10^m}.$$

对任意 $\varepsilon>0$, 取 $N\in\mathbb{Z}^+$ 使 $\frac{1}{10^N}<\varepsilon$, 则 对于任意$m,n\geqslant N, |S_n-S_m|<\varepsilon$.
因此,$\{S_n\}$ 为柯西列, 则原级数收敛.
由此例可见, 柯西列的概念几乎是从 '十进制实数刻画' 这一设定中抽象出来的. □

命题 3.4.10. 实级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛当且仅当
复

$$\text{对于任意}\varepsilon>0,\text{存在}N\in\mathbb{Z}^+:\left(\text{对于任意}n>m\geqslant N, |a_m+a_{m+1}+\cdots+a_n|<\varepsilon\right).$$

证明: 由 $\mathbb{R}$ 的完备性易知. □
$\mathbb{C}$

3.5 非负级数的收敛性

若 $a_i \geqslant 0$, 则 $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ 递增, 故

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sup_{n\geqslant 1}\{a_1 + \cdots + a_n\} \in [-\infty, +\infty].$$

命题 3.5.1. 若 $0 \leqslant a_i \leqslant b_i$ 且 $\sum_{i=1}^{+\infty} b_i < +\infty$, 则 $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i < +\infty$.

证明: 注意对任意 $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

因此若 $\{b_1 + b_2 + \cdots + b_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ 有上界, 则 $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ 有上界, 证毕. □

例子. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

证明: 对于任意$n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$,

$$0 < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 2.$$

因此,$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛. □

定义 3.5.2. $\mathbb{R}^n$ 中级数 $\sum_{i=1}^{+\infty} x_i$ **绝对收敛**, 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_i\| < +\infty$.

命题 3.5.3. 绝对收敛级数收敛.

证明: 注意对任意 $m < n$,

$$\left\|\sum_{k=m}^{n} x_k\right\| \leqslant \sum_{k=m}^{n} \|x_k\|.$$

设 $\sum_{k=1}^{+\infty} \|x_k\|$ 收敛, 对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\text{存在} N \in \mathbb{Z}^+ : \left(\text{对于任意} n > m > N, \left\|\sum_{k=m}^{n} x_k\right\| \leqslant \sum_{k=m}^{n} \|x_k\| < \varepsilon\right).$$

也就是说,$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ 收敛. □

3.6 实数的构造

定义 3.6.1. 设集合 X 上有等价关系 $\sim$. 对于 $x \in X$, 记 $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$ 为 x 所在的等价类. 全体等价类的集合 $\{[x] \mid x \in X\}$ 记为 $X \,/ \sim$, 也就是 'X 商掉这个等价关系' 的结果.

附注. 对于任意$x, y \in X, [x] = [y] \iff x \sim y$.

例子. $\mathbb{R}^2$ 上全等三角形的等价类.

定义 3.6.2. 称 $\mathbb{Q}$ 中的柯西列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 是等价的, 记为 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 若

$$\lim_{n \to +\infty} (x_n - y_n) = 0.$$

可以证明 $\sim$ 是 $\mathbb{Q}$ 中全体柯西列的集合上的一个等价关系, 于是我们可以进一步定义 $\hat{\mathbb{Q}} = \{\mathbb{Q}\text{中柯西列}\}, \mathbb{R} = \hat{\mathbb{Q}} \,/ \sim$. 对 $[x], [y] \in \mathbb{R}$, 定义运算如下.

- $[x] + [y] = [x + y]$, 其中 $(x + y)_n = x_n + y_n$;
- $[x] \times [y] = [x \times y]$, 其中 $(xy)_n = x_n \times y_n$.

现验证这些运算良定义, 即对任意柯西列 $x' \sim x, y' \sim y$, 上述运算所得结果等价, 也就是

- $x' + y' \sim x + y$;
- $x'y' \sim xy$.

定义 3.6.3. 定义 $\mathbb{Q}$ 到 $\mathbb{R}$ 的嵌入映射

$$f: \begin{array}{c} \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \\ q \mapsto \{q, q, \dots\} \end{array}.$$

下面我们来定义 $\mathbb{R}$ 上的序关系.

定义 3.6.4. 对于任意$[x], [y] \in \mathbb{R}$, 称 $[x] < [y]$, 若 对于任意$\varepsilon > 0$, 存在$N \in \mathbb{Z}^+$: 对于任意$n \geqslant N, x_n + \varepsilon \leqslant y_n$.

练习. 证明以下命题等价:

(1) $[x] \leqslant [y]$;

(2) 存在 $[y'] \in \mathbb{R}$ 满足 $[y'] = [y]$, 且对任意 $n \in \mathbb{Z}^+$ 有 $x(n) \leqslant y'(n)$;

(3) 对任意有理数 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$ 使得对任意 $n \geqslant N$ 有 $x(n) \leqslant y(n) + \varepsilon$;

(4) '$[y] < [x]$' 不成立.

注记. $\mathbb{R}$ 是全序域, 满足

- Archimedean property;
- $\alpha \leqslant \beta \iff \alpha+\gamma \leqslant \beta+\gamma$;
- $\alpha \leqslant \beta \wedge \gamma > 0 \implies \alpha\gamma \leqslant \beta\gamma$.

命题 3.6.5. 若 $x=\{x_n\} \in \hat{\mathbb{Q}}$ 且 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的子列, 则它们是等价的, 即 $[\{x_n\}] = [\{x_{n_k}\}]$.

推论 3.6.6. 对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$, 存在单调序列 $x \in \hat{\mathbb{Q}}$ 使 $\alpha = [x]$.

证明: 任意序列有单调子列. □

定义 3.6.7. 考虑 $\{\alpha_i\} \subseteq \mathbb{R}$. 称 $\alpha_i \to \beta$, 若对任意有理数 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$ 使得对任意 $i \geqslant N$ 有 $\beta - \varepsilon \leqslant \alpha_i \leqslant \beta + \varepsilon$.

定理 3.6.8. $\mathbb{R}$ 中任意有界列 $\{\alpha_i\}$ 有收敛子列.

证明: 设 $M \in \mathbb{Z}^+$ 为 $\{|\alpha_i|\}$ 的一个上界, 将 α_i 换成它的一个单调子列并不妨设其单调递增.
若 $\{\alpha_i\}$ 中只有有限多个不同项, 则其显然收敛.
否则, 将 $\{\alpha_i\}$ 换成它的一个严格递增子列, 则 $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots$, 因每个 α_i 都可表为 $\mathbb{Q}$ 中单调列, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ 中必有有限个只能表示为 $\mathbb{Q}$ 中递增 (减), 故 $\{\beta_1, \beta_2\}$ 必有有限个只能表示为 $\mathbb{Q}$ 中递增或递减序列中的一种, 通过扔去这有限几项, 我们能假设以下两条件必居其一:

(1) 每个 α_i 都可表为 $\alpha_i = [\{x_i(n)\}]$, 其中 $x_i(n)$ 关于 n 单调递增.

(2) 每个 α_i 都可表为 $\alpha_i = [\{x_i(n)\}]$, 其中 $x_i(n)$ 关于 n 单调递减.

先考虑 (1); 因为 $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots$, 我们可以把 $\{x_2(n)\}$ 换成一个等价柯西列满足:对于任意$n \in \mathbb{Z}^+, x_1(n) \leqslant x_2(n)$, 类似修改 $x_3, x_4, \ldots$, 我们有:

$$x_1(n) \leqslant x_2(n) \leqslant x_3(n) \leqslant \cdots \text{且}, x_i(1) \leqslant x_i(2) \leqslant x_i(3) \leqslant \cdots$$

令 $y(n) = x_n(n), \beta = [y]$. 我们证明 $\alpha_i \to \beta$, 因 $\{\alpha_i\}$ 关于 i 递增, 只需证 $\beta = \sup\{\alpha_i : i \in \mathbb{Z}^+\}$ 即可.β 为上界:对于任意i, 若 $n \geqslant i$, 则 $y(n) = x_n(n) \geqslant x_i(n)$, 故 $\alpha_i \leqslant \beta$, 故 $\alpha_i \leqslant \beta$.β 是最小上界:对于任意$\varepsilon > 0$, 要证 存在$\varepsilon > 0$, 要证 存在i 使 $\beta - \varepsilon < \alpha_i$ 或存在i, 存在$N \in \mathbb{Z}^+$, 使 对于任意$n \leqslant N$, 有 $y(n) - \varepsilon < x_I(n)$ 即可. 等价地,$x_n(n) - \varepsilon < x_i(n) \iff x_n(n) - x_i(n) < \varepsilon$. 因 $\{x_n(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$,对于任意$n > m \leqslant N$ 有 $0 \leqslant x_n(n) -$

$x_m(m) < \varepsilon$. 故取 $i = N$, 对于任意$n \leqslant N = i$ 有 $x_n(n) - x_i(n) \leqslant x_n(n) - x_i(i) < \varepsilon$(因为 $x_i(i) \leqslant x_i(n)$). 故 (1) 得证. 对于 (2), 我们声称 对于任意$\alpha_i' = [\{x_i'(n)\}]$,$x_i'(n)$ 关于 n 递增, 且 $\alpha_i \leqslant \alpha_i' \leqslant \alpha_{i+1}$, 则由 (1) 可知 存在 $\in \mathbb{Z}^+$, 使 $\lim\limits_{i\to+\infty} \alpha_i' = \lim\limits_{i\to+\infty} \alpha_{i+1}' = \beta$, 由 $\alpha_{i-1}' \leqslant \alpha_i \leqslant \alpha_i'$ 和 *Squeeze Lemma* 得 $\alpha_i \to \beta.\alpha_i'$ 的构造: 因 $\alpha_i < \alpha_{i+1}$, 存在$\varepsilon > 0$ 使得 存在$N \in \mathbb{Z}^+$, 对于任意$n \geqslant N$ 有关于 n 的柯西列,存在$L \geqslant N$, 对于任意$n \geqslant L$ 有 $a \leqslant x_i(L) - x_i(n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, 定义 $x_i'(n)$ 如下, 若 $n \geqslant N$ 定义 $x_i'(n) = 2x_i(L) - x_i(n)$. 显然 $x_i(n) \leqslant x_i'(n)$, 而 $x_i'(n) = 2(x_i(L) - x_i(n)) + x_i(n) \leqslant x_i(n) \leqslant \varepsilon + x_i(n) \leqslant x_{i+1}(n)$, 故取 $x_i'(1) \leqslant \cdots \leqslant x_i'(l-1)$ 小于等于 $x_i'(L)$, 则 $x_i'(n)$ 关于 n 递增. 且若 $\alpha_i' = \{x_i(n)\}$, 则 $\alpha_i \leqslant \alpha_i' \leqslant \alpha_{i+1}$ □

引理 3.6.9. *若 $\mathbb{R}$ 中任意有界单调列有收敛子列, 则 $\mathbb{R}$ 满足确界原理.*

证明: 与作业 1 中附加题方法相同, 令 $E \subseteq \mathbb{R}$ 非空有上界并设 $F = \{\beta \in \mathbb{R} \mid \beta \text{是} E \text{的上界}\}$, 则可构造数列 $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \subseteq F$ 递减, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\beta_n - \alpha_n) = 0$. 取收敛子列 $\{\alpha_{n_k}\}\{\beta_{n_k}\}$ 得到 E 的上确界. □

3.7 级数收敛判别法

命题 3.7.1. *令 $\{a_n\}$ 为 $\mathbb{R}$ 中的有界序列 , $A \in [-\infty, +\infty]$, 有以下结论.*

(1) *若 $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n < A$, 则 存在$N \in \mathbb{Z}^+$: 对于任意$n \geqslant N, a_n < A$.*

(2) *若 $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n > A$, 则 对于任意$N \in \mathbb{Z}^+$, 存在$n \geqslant N : a_n > A$.*

证明: 令 $S_n = \sup\limits_{m\geqslant n} a_m$, 它关于 n 递减, 且

$$\inf_{n\geqslant 1} S_n = \limsup_{n\to+\infty} a_n.$$

(1) 若 $\inf\limits_{n\geqslant 1} S_n < A$, 则 A 非 $\{S_n\}_{n\geqslant 1}$ 之下界, 故存在 $N \in \mathbb{Z}^+$ 使 $S_N < A$, 则对于任意$m \geqslant N, a_m < A$.

(2) 若 $\inf\limits_{n\geqslant 1} S_n > A$, 则对任意 $N \in \mathbb{Z}^+$, 有 $\inf\{a_n \big| n \geqslant N\} > A$, 因此 存在$n \geqslant N : a_n > A$.

□

有了以上准备, 我们现在可以利用上下极限判断某类级数的收敛性.

定理 3.7.2 (根值审敛法 (Root test)). 令

$$\alpha = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\|x_n\|}.$$

若 $\alpha<1$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 绝对收敛; 若 $\alpha>1$, 则级数发散.

证明: 若 $\alpha<1$, 取某 $\beta\in(\alpha,1)$, 则

$$\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\|x_n\|}<\beta.$$

由命题 3.7.1知 存在$N\in\mathbb{Z}^+:\big($对于任意$n\geqslant N, \|x_n\|<\beta^n\big)$.
然后, 因为 $\sum_{n=1}^{+\infty}\beta^n=\dfrac{\beta}{1-\beta}<+\infty$, 故 $\sum_{n=1}^{n} x_n$ 绝对收敛.
若 $\alpha>1$, 则由命题 3.7.1知对任意 $N\in\mathbb{Z}^+$, 存在 $n\geqslant N$ 使得 $\sqrt[n]{\|x_n\|}>1, \|x_n\|>1$.
所以 $x_n\nrightarrow 0$, 进一步易知 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 不收敛. □

定理 3.7.3 (比值审判法 (Ratio test)). 令

$$\alpha=\limsup_{n\to+\infty}\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|}, \alpha'=\liminf_{n\to+\infty}\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|},$$

若 $\alpha<1$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 绝对收敛; 若 $\alpha'>1$, 则级数发散.

证明: 若 $\alpha<1$, 取 $\beta\in(\alpha,1)$, 则由命题 3.7.1, 存在 $N\in\mathbb{Z}^+$ 使得对任意 $n\geqslant N$,

$$\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|}<\beta,$$
$$\|x_n\|\leqslant\beta^{n-N}\|x_N\|.$$

因此,

$$\sum_{n=N}^{+\infty}\|x_n\|\leqslant\sum_{n=N}^{+\infty}\beta^{n-N}\|x_N\|=\frac{\|x_N\|}{1-\beta}<+\infty.$$

也就是说,$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 绝对收敛.
若 $\alpha'>1$, 类似可得存在 $N\in\mathbb{Z}^+$ 使得对任意 $n\geqslant N$,

$$\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|}>1,$$
$$\|x_{n+1}\|>\|x_n\|,$$
$$\|x_n\|\geqslant\|x_N\|.$$

显然 $x_n\nrightarrow 0$, 进一步易知 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 不收敛. □

例子. 定义指数函数 $e^z=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$, 其中 $z\in\mathbb{C}$. 指数函数在定义域上总是绝对收敛.

证明: 不妨考虑 $z\neq 0$ 的情况, 容易验证

$$\frac{\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{z^n}{n!}\right|}=\frac{|z|}{n+1}\to 0.$$

□

定义 3.7.4. 形如 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ (其中$a_n\in\mathbb{C}$) 的级数称为**幂级数 *(Power Series)***. 取 $R\in[0,+\infty]$ 使

$$\frac{1}{R}=\limsup_{n\to+\infty}\|a_n\|^{\frac{1}{n}}.$$

R 称为该幂级数的**收敛半径**. 由定理 3.7.2,

(1) 若 $|z|<R$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ 绝对收敛

(2) 若 $|z|>R$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ 不收敛.

例子. 考虑 $R\in[0,+\infty]$ 为 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$ 的收敛半径, 可得 $R=+\infty$, 因为若 $R<+\infty$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(R+1)^n}{n!}$ 发散, 与先前结果不符.

推论 3.7.5. 考虑上述例子, 则 $\liminf\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$.

命题 3.7.6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}$ 的收敛半径为 1.

证明:

$$\frac{\left|\frac{z^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|\frac{z^n}{n}\right|}=\frac{n\cdot|z|}{n+1}\to 1.$$

由定理 3.7.3,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}\begin{cases}\text{绝对收敛}, & \text{若}|z|<1;\\ \text{不收敛}, & \text{若}|z|>1.\end{cases}$$

□

推论 3.7.7. 考虑上述命题, 则 $\liminf\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

定理 3.7.8. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

证明: 在推论 3.7.5的基础上, 只需证 $\sqrt[n]{n}$ 收敛即可. 易知若 $n \geqslant 3$, 则 $(n+1)^n \leqslant n^{n+1}$, 因为

$$\begin{aligned}(n+1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{n^n}{k!} \\ &= \left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) n^n \\ &\leqslant n \cdot n^n = n^{n+1}.\end{aligned}$$

另外,$(n+1)^n \leqslant n^{n+1}$ 也可以由归纳证明如下.

$$\begin{aligned}(n+1)^n \leqslant n^{n+1} &\iff (n+1)^n \cdot (n-1)^n \leqslant n^{n+1} \cdot (n-1)^n \\ &\Longleftarrow n^{2n} \leqslant n^{n+1} \cdot (n-1)^n \iff n^{n-1} \leqslant (n-1)^n.\end{aligned}$$

当 $n=3$ 时 $(n+1)^n \leqslant n^{n+1}$ 成立, 故由数学归纳法, 该命题对 $n \geqslant 3$ 都成立. □

推论 3.7.9. 令 $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 为幂级数. 则 $f(z)$ 与 $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^n$ 有相同收敛半径.

证明: 由 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 可得 $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \limsup_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{a_n}\right)$. □

附注. 也就是说,$f(z)$ 与它的 '导数'$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$ 有相同收敛半径. 然而, 这个 '导数' 目前只是形式上的.

推论 3.7.10. 若 $A \in \mathbb{R}_{\neq 0}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{A} = 1.$$

推论 3.7.11. 若 $a > 1$ 而 $p \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0.$$

证明: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^n} \cdot z^n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^p}{a^n} \cdot z^n$ 的收敛半径均为 a. 因 $a > 1$, 故 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^p}{a^n} \cdot z^n$ 在 $z = 1$ 处收敛. □

附注. $\dfrac{n^p}{a^n} \to 0$ 也可用基本的不等式估计方法证明.

定理 3.7.12. 若 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 为实数列且对任意 $n \in \mathbb{Z}^+$ 有 $a_n \leqslant b_n$, 则

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \leqslant \liminf_{n\to+\infty} b_n$$
$$\limsup_{n\to+\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to+\infty} b_n.$$

附注. 上述定理对级数中估计收敛半径的下界很有用.

例子. 考虑级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \overbrace{\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{10}\right)}{3^n}}^{a_n} \cdot z^n$

对任意 $n \in \mathbb{Z}^+$, 有 $\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \dfrac{1}{3}$. 易得 $\displaystyle\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{3}$, 即 $R = \dfrac{1}{\displaystyle\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \geqslant 3$.

以上判别法可以推广到更广泛的空间上去.

定义 3.7.13. 令 V 是 $\overset{\mathbb{C}}{\mathbb{R}}$ 上的线性空间. 若 $\|\cdot\| : V \to [0, +\infty)$ 满足如下条件, 称 $\|\cdot\|$ 为**范数 (norm)**, 称 $(V, \|\cdot\|)$ (或直接称 V)为一个**赋范线性空间 (normed space)**.

(1) 对于任意$\lambda \in \overset{\mathbb{C}}{\mathbb{R}}$, 对于任意$x \in V$,$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

(2) 对于任意$x, y \in V$,$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$;

(3) $x = 0 \iff \|x\| = 0$.

附注. (1) 能推出 $\|0\| = 0$.

注记. 一个赋范线性空间 V 自然是一个度量空间, 我们只需要在其上定义度量 $d(x, y) = \|x - y\|$. 若 V 在 d 下是完备的, 则称 V 为**巴拿赫空间 (Banach space)**.

不难发现, 若 V 为巴拿赫空间, 我们可以类似地定义级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ (其中$x_n \in V$). 若级数绝对收敛, 则其收敛. 而且, 根值审判法和比值审判法也相应地成立, 因此关于幂级数收敛半径的性质也成立.

例子.

$$\left(\mathbb{R}^n, \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\right)$$

与

$$\left(\mathbb{C}^n, \|z\| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2}\right)$$

均为 *Banach* 空间.

例子. 考虑集合 X 和 $B(X,\mathbb{C})=\{f:X\to\mathbb{C}\,\|f\|_\infty<+\infty\}$, 其中

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in X}|f(x)|.$$

$\|\cdot\|_\infty$ 定义了 $B(X,\mathbb{C})$ 上的一个范数, 且 $B(X,\mathbb{C})$ 是 *Banach* 空间.

练习. 在作业中, 验证关于上述例子满足范数性质的细节.

注记. $\|f\|_\infty<+\infty$ 意味着存在 $C\in\mathbb{Z}^+$ 使得对任意 $x\in X$ 有 $|f(x)|\leqslant C$. 这样的函数 f 称为**一致有界函数**.

练习. 更一般地, 考虑赋范空间 V. 令 $B(X,V)=\{f:X\to V\,\|f\|_\infty<+\infty\}$, 其中

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in X}\|f(x)\|.$$

证明:$B(X,V)$ 是赋范空间, 且若 V 是 *Banach* 空间, 则 $B(X,V)$ 是 *Banach* 空间.

3.8 网, 双序列

我们接下来的目标是理解如下问题:

$$e^z\cdot e^w\overset{?}{=}e^{z+w},$$

即 $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{z^m}{m!}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{w^n}{n!}\overset{?}{=}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(z+w)^k}{k!}$, 以及级数重排问题.

定义 3.8.1. 集合 J 上的一个关系 $\leqslant$ 称为**预序 preorder**, 若它满足

(1) 自反性: 对于任意$\alpha\in J,\alpha\leqslant\alpha$; 和

(2) 传递性: 对于任意$\alpha,\beta,\gamma\in J,(\alpha\leqslant\beta\wedge\beta\leqslant\gamma\implies\alpha\leqslant\gamma)$.

附注. 若一个关系仅满足传递性, 只需定义新关系 $\alpha\lesssim\beta$ 为 $(\alpha\leqslant\beta\vee\alpha=\beta)$, 则 $\lesssim$ 为预序.

定义 3.8.2. 若预序集 $(J,\leqslant)$ 额外满足

(3) 对于任意$\alpha,\beta\in J$, 存在$\gamma\in J:\alpha\leqslant\gamma\wedge\beta\leqslant\gamma$,

则称 $(J,\leqslant)$ 为**有向集 directed set**.

例子. $(\mathbb{R},\leqslant)$,$(2^X,\subseteq)$ 是有向集.

例子. 考虑有向集 $(I,\leqslant)$和$(J,\leqslant)$. 将 $(\alpha,\beta)\leqslant(\alpha',\beta')$ 定义为 $(\alpha\leqslant\alpha'\wedge\beta\leqslant\beta')$, 则 $I\times J$ 也是有向集. 特别地,$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 可以是有向集.

定义 3.8.3. 令 X 为度量空间,$(J,\leqslant)$ 为有向集. 称函数 $f: J\to X$ 为 X 的一个 (以 J 为指标集) 的网 **net**.$f(\alpha)$ 一般记作 x_α,f 一般记为 $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ 或 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in J}$.
考虑 $x\in X$. 记 $\lim\limits_{\alpha\in J} x_\alpha = x$, 或 $x_\alpha\to x$ (x_α收敛于x), 若

$$\text{对于任意}\varepsilon>0,\text{存在}\alpha\in J:\Big(\text{对于任意}\beta\geqslant\alpha, d(x_\beta,x)<\varepsilon\Big).$$

附注. 由定义,$x_\alpha\to x \iff d(x_\alpha,x)\to 0$ 显然.

命题 3.8.4. 对于度量空间 X 中的网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$, 其极限若存在则唯一.

证明: 若 $x_\alpha\to x, x_\alpha\to y$, 其中 $x\neq y$, 设 $\varepsilon=d(x,y)$. 注意

$$\text{存在}A\in I:\Big(\text{对于任意}\alpha\geqslant A, d(x_\alpha,x)<\frac{\varepsilon}{3}\Big),$$

而且

$$\text{存在}B\in I:\Big(\text{对于任意}\alpha\geqslant B, d(x_\alpha,y)<\frac{\varepsilon}{3}\Big).$$

由有向集定义, 存在 $\alpha\geqslant A,B$, 则 $d(x,y)\leqslant d(x_\alpha,x)+d(x_\alpha,y)<\dfrac{2}{3}\varepsilon<d(x,y)$, 矛盾. □

引理 3.8.5 (双边控制 Squeeze Lemma)**.** 考虑 $\mathbb{R}$中的网$\{x_\alpha\}_{\alpha\in J},\{y_\alpha\}_{\alpha\in J},\{z_\alpha\}_{\alpha\in J}$和$A\in\mathbb{R}$. 若对任意 $\alpha\in A$ 有 $x_\alpha\leqslant y_\alpha\leqslant z_\alpha$, 而$x_\alpha\to A$ 且 $z_\alpha\to A$, 则 $y_\alpha\to A$.

例子. 以 $\mathbb{Z}^+$ 为指标集的网就是一般的序列.

例子. X 中以 $\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$ 为指标集的网即为双序列 $\{x_{m,n}\}_{m,n\geqslant 1}$.
考虑 $x\in X$, $\lim\limits_{(m,n)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+} x_{m,n}=x$ 意味着

$$\text{对于任意}\varepsilon>0,\text{存在}M,N\in\mathbb{Z}^+:\Big(\text{对于任意}m\geqslant M,\text{对于任意}n\geqslant N, d(x_{m,n},x)<\varepsilon\Big),$$

也就是

$$\text{对于任意}\varepsilon>0,\text{存在}N\in\mathbb{Z}^+:\Big(\text{对于任意}m,n\geqslant N, d(x_{m,n},x)<\varepsilon\Big),$$

或者

$$\text{对于任意}\varepsilon>0,\text{存在}N\in\mathbb{Z}^+:\text{对于任意}m,n\in\mathbb{Z}^+,\Big(\min\{m,n\}\geqslant N\implies d(x_{m,n},x)<\varepsilon\Big),$$

故也可记为 $\lim\limits_{m,n\to+\infty} x_{m,n}=x$ 或 $\lim\limits_{\min\{m,n\}\to+\infty} x_{m,n}=x$.

例子. 考虑集合 X. 将 $\mathbb{Z}^+\times X$ 上预序 $(m,x)\underset{\mathbb{Z}^+}{\leqslant}(n,y)$ 定义为 $m\leqslant n$.
令 V 为赋范线性空间,$V^X=\{f:X\to V\}$.
若 $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 为 V^X 中序列, 则 $\{f_n(x)\}_{(n,x)\in\mathbb{Z}^+\times X}$ 是 V 中的网. $\lim\limits_{(n,x)\in\mathbb{Z}^+\times X} f_n(x)=0$ 意味着

$$\text{对于任意}\varepsilon>0,\text{存在}(N,y):\Big(\text{对于任意}(n,x)\underset{\mathbb{Z}^+}{\geqslant}(N,y),\big\|f_n(x)\big\|<\varepsilon\Big),$$

也就是

$$\text{对于任意}\varepsilon>0,\text{存在}N\in\mathbb{Z}^+:\Big(\text{对于任意}n\geqslant N,\text{对于任意}x\in X,\big\|f_n(x)\big\|<\varepsilon\Big).$$

此时我们称函数列 $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 一致收敛到 0.
若 $f:X\to V$ 且 $\{f_n-f\}_{n\geqslant 1}$ 一致收敛到 0, 则称 $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 一致收敛到 f, 也就是说

$$\lim_{n\to+\infty}\big\|f_n-f\big\|_\infty=0,$$

即

$$\sup_{x\in X}\big\|f_n(x)-f(x)\big\|=0.$$

例子. 设

$$f_n:\begin{array}{c}(0,1]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^n\end{array},\ \text{其中}n\in\mathbb{Z}^+;$$

$$f(x)=\begin{cases}0,\ \text{若}x\in(0,1);\\ 1,\ \text{若}x=1.\end{cases}$$

容易发现 对于任意$x\in(0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x)$. 然而,$\big\|f_n-f\big\|_\infty=1\neq 0$.

例子. 若 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 为 X 中序列, 则它是柯西列当且仅当

$$\lim_{m,n\to+\infty}d(x_m,x_n)=0.$$

定义 3.8.6. 若 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是 X 中的网, 我们称它为**柯西网 Cauchy net**, 若

$$\lim_{(\alpha,\beta)\in J\times J}d(x_\alpha,x_\beta)=0,$$

即

$$\text{对于任意}\varepsilon>0,\text{存在}\gamma_1,\gamma_2\in J:\big(\text{对于任意}\alpha\geqslant\gamma_1,\text{对于任意}\beta\geqslant\gamma_2,d(x_\alpha,x_\beta)<\varepsilon\big).$$

附注. 由有向集定义, 可取 $\gamma\geqslant\gamma_1,\gamma_2$, 故 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是 Cauchy 网当且仅当

$$\text{对于任意}\varepsilon>0,\text{存在}\gamma\in J:\big(\text{对于任意}\alpha,\beta\geqslant\gamma,d(x_\alpha,x_\beta)<\varepsilon\big).$$

命题 3.8.7. *若 $x_\alpha\to x$, 则 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是 Cauchy 网.*

证明: $\lim\limits_{\alpha\in J}x_\alpha=x$, 则 $\lim\limits_{(\alpha,\beta)\in J\times J}x_\alpha=x$, 即 $\lim\limits_{(\alpha,\beta)\in J\times J}d(x_\alpha,x)=0$. 类似有 $\lim\limits_{(\alpha,\beta)\in J\times J}d(x_\beta,x)=0$.
注意

$$0\leqslant d(x_\alpha,x_\beta)\leqslant d(x_\alpha,x)+d(x_\beta,x).$$

因为 $\lim\limits_{(\alpha,\beta)\in J\times J}\big(d(x_\alpha,x)+d(x_\beta,0)\big)=0$, 由 Squeeze Lemma, 可得 $\lim\limits_{(\alpha,\beta)\in J\times J}d(x_\alpha,x_\beta)=0$. $\square$

命题 3.8.8. 设 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in J}, \{y_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 为赋范线性空间 X 中的网, 其中 $x_\alpha \to X, y_\alpha \to y$. 设 $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 为 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 中的网, 其中 $\lambda_\alpha \to \lambda$. 那么

(1) $x_\alpha + y_\alpha \to x + y$;

(2) $\lambda_\alpha x_\alpha \to \lambda x$;

(3) 若 (对于任意$\alpha, \lambda_\alpha \neq 0) \wedge \lambda \neq 0$, 则 $\dfrac{x_\alpha}{\lambda_\alpha} \to \dfrac{x}{\lambda}$;

(4) 若 (对于任意$\alpha, x_\alpha \leqslant y_\alpha$), 则 $x \leqslant y$.

定义 3.8.9. 称 $\mathbb{R}$ 中的网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in J}$ **(单调)递增**, 若 $\alpha \leqslant \beta \implies x_\alpha \leqslant x_\beta$.
递减 $x_\alpha \geqslant x_\beta$

注记. $\mathbb{R}$ 中的网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 有**上界** (即存在 $c \in \mathbb{R}$ 使对任意 $\alpha \in J$ 有 $x_\alpha \leqslant C$) 意味着

$$\sup\left\{x_\alpha \middle| \alpha \in J\right\} < +\infty.$$

下界类似.

命题 3.8.10. 令 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 为 $\mathbb{R}$ 中的递增网, 则

$$\sup\left\{x_\alpha \middle| \alpha \in J\right\} = \lim_{\alpha\in J} x_\alpha.$$

证明: 与序列的情形类似. $\square$

定义 3.8.11. 称有向集 J 中的子集 K **共尾 cofinal**, 若 对于任意$\alpha \in J$, 存在$\beta \in K$: $\alpha \leqslant \beta$.

定义 3.8.12. 考虑 X 中的网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in J}$. 形如 $\{x_{\alpha_s}\}_{s\in S}$ 的网称为 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 的一个**子网 subnet**, 若其中 S 是一个有向集, 有映射

$$\begin{aligned} S &\to J \\ s &\mapsto \alpha_s \end{aligned},$$

满足

(1) 递增性: 即 对于任意$s, t \in S, (s \leqslant t \implies \alpha_s \leqslant \alpha_t)$; 和

(2) $\left\{\alpha_s \middle| s \in J\right\}$ 是 J 的共尾子集, 即 (对于任意$\gamma \in J$, 存在$s \in S : \alpha_s \geqslant \gamma$).

命题 3.8.13. 若 X 中的网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in J} \to x$, 则其任一子网 $\{x_{\alpha_s}\}_{s\in S} \to x$.

证明: 由 $x_\alpha \to x$, 考虑任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\beta \in J$ 使得 对于任意$\alpha \geqslant \beta$,

$$d(x_\alpha, x) < \varepsilon.$$

由共尾性,存在$t \in S : \alpha_t \geqslant \beta$. 由递增性,对于任意$s \geqslant t$,

$$\alpha_s \geqslant \alpha_t \geqslant \beta,$$
$$d(x_{\alpha_s}, x) < \varepsilon.$$

□

例子. 令 $\{x_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{Z}^+}$是$X$ 中的网, 则 $\{x_{k,k}\}_{k\in\mathbb{Z}^+}, \{x_{2k,k}\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ 是其子网, 而 $\{x_{k,1}\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ 不是. 举例如下. 令实序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \to x$, 我们知道 $\lim\limits_{m,n\to+\infty}(x_m - x_n) = 0$, 因此 $\lim\limits_{k\to+\infty}(x_{2k} - x_k) = 0$. 然而, 当 $x_1 \neq x$, 有 $\lim\limits_{k\to+\infty}(x_k - x_1) = x - x_1 \neq 0$.

例子. 考虑 $x_{m,n} = \dfrac{m}{m+n}$. 有子网 $x_{n,n} = \dfrac{n}{n+n} \to \dfrac{1}{2}$, 然而 $x_{2n,n} = \dfrac{n}{2n+n} \to \dfrac{1}{3} \neq \dfrac{1}{2}$, 故 $\lim\limits_{m,n\to+\infty} \dfrac{n}{m+n}$ 不存在.

附注. 在上例中,

$$\lim_{m\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{m+n} = 1,$$

但

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{m\to+\infty} \frac{n}{m+n} = 0.$$

对于收敛网则不会出现这种现象.

定理 3.8.14 (累次极限定理)**.** 令 $\{(x_{\alpha,\beta})\}_{(\alpha,\beta)\in I\times J} = \{x_{\alpha,\beta}\}_{\substack{\alpha\in I\\ \beta\in J}}$ 是度量空间 X 中的网. 假设

(1) $\lim\limits_{(\alpha,\beta)\in I\times J} x_{\alpha,\beta} = x \in X$, 且

(2) 对于任意$\alpha \in I, \lim\limits_{\beta\in J} x_{\alpha,\beta} = x_\alpha \in X$,

则 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I} \to x$, 即 $\lim\limits_{\alpha\in I}\lim\limits_{\beta\in J} x_{\alpha,\beta} = \lim\limits_{(\alpha,\beta)\in I\times J} x_{\alpha,\beta}$. 特别地, 若额外假设

(3) 对于任意$\beta \in J, \lim\limits_{\alpha\in I} x_{\alpha,\beta}$ 存在,

则

$$\lim_{\alpha\in I}\lim_{\beta\in J} x_{\alpha,\beta} = \lim_{\beta\in J}\lim_{\alpha\in I} x_{\alpha,\beta}.$$

证明: 由假设 (1), 考虑任意 $\varepsilon > 0$, 存在$A \in I$和$B \in J$ 使得 对于任意$\alpha \geqslant A$, 对于任意$\beta \geqslant B$,

$$d(x, x_{\alpha,\beta}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由假设 (2), 对于任意$\alpha \in I$,

$$\text{存在}B_\alpha \in J : \left(\text{对于任意}\beta \geqslant B_\alpha, d(x_{\alpha,\beta}, x_\alpha) < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

由有向集定义, 对任意 $\alpha \geqslant A$, 取 $B'_\alpha \in J$ 满足 $B'_\alpha \geqslant B \wedge B'_\alpha \geqslant B_\alpha$, 则对任意 $\beta \geqslant B'_\alpha$,

$$d(x, x_\alpha) \leqslant d(x, x_{\alpha,\beta}) + d(x_{\alpha,\beta}, x_\alpha) < \varepsilon.$$

$\square$

推论 3.8.15. 若 $\{x_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{Z}^+}$ 为$\mathbb{R}$ 中递增有上界双序列, 即 $\left(m' \geqslant m \wedge n' \geqslant n \implies x_{m',n'} \geqslant x_{m,n}\right)$ 且 存在$C \in \mathbb{R} : \left(\text{对于任意}m, n \in \mathbb{Z}^+, x_{m,n} \leqslant C\right)$, 则

$$\lim_{m,n\to+\infty} x_{m,n} = \lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} x_{m,n} = \lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty} x_{m,n} = \sup\left\{x_{m,n}\middle| m, n \in \mathbb{Z}^+\right\} \text{ 都存在.}$$

附注. 对递增有上界的双指标网 $\{x_{\alpha,\beta}\}_{\substack{\alpha \in I \\ \beta \in J}}$ 有类似推论.

例子. 令 $\{a_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{Z}^+} \subseteq [0, +\infty)$. 假设存在 $C \in \mathbb{R}^+$ 使得对任意 $m, n \in \mathbb{Z}^+$ 有

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} < C,$$

则

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty} a_{i,j} = \sup\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\middle| m, n \in \mathbb{Z}^+\right\} < +\infty.$$

例子. 令 $x_{m,n} = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi(m+n)}{4}$. 注意

$$\lim_{m,n\to+\infty}\frac{1}{m} = \lim_{m,n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0,$$
$$\lim_{m,n\to+\infty}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) = 0,$$

而 $0 \leqslant |x_{m,n}| \leqslant \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$, 故由 *Squeeze Lemma*, $\lim\limits_{m,n\to+\infty} x_{m,n} = 0$.

附注. 上述例子用到了如下事实.

命题 3.8.16. 设 I, J 为有向集,$\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为 X 中的网, 且 $\lim\limits_{\alpha\in I} x_\alpha = x \in X$. 对任意 $\alpha \in I, \beta \in J$, 令 $y_{\alpha,\beta} = x_\alpha$, 则 $\lim\limits_{(\alpha,\beta)\in I\times J} y_{\alpha,\beta} = x$.

证明: 通过映射

$$\begin{aligned} I\times J&\to I\\ (\alpha,\beta)&\mapsto\alpha \end{aligned}$$

可将 $\{y_{\alpha,\beta}\}_{(\alpha,\beta)\in I\times J}$ 看成 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 的子网. □

定理 3.8.17. 令 X 为完备的度量空间, 则 X 中任意 *Cauchy* 网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 收敛.

附注. 证明思路如下. 可构造递增列 $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}\subseteq J$ 满足对任意 $n\in\mathbb{Z}^+$ 和 J 中元素 $\beta,\gamma\geqslant\alpha_n$ 有 $d(x_\beta,x_\gamma)<\dfrac{1}{n}$, 可推出 $\{x_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 收敛于 $x\in X$, 然后 $\lim\limits_{\alpha\in J}x_\alpha=x$.

练习. 补充上述定理的证明细节.

命题 3.8.18. 令 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为 $\mathbb{R}$ 中网,$A_\alpha=\sup\left\{x_\beta\middle|\beta\geqslant\alpha\right\}, B_\alpha=\inf\{x_\beta\middle|\beta\geqslant\alpha\}$, 有以下结论:

(1) $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 递减, 故收敛于 $A\in[-\infty,+\infty]$;

(2) $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 递增, 故收敛于 $B\in[-\infty,+\infty]$;

(3) $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 极限存在于 $[-\infty,+\infty]$ 当且仅当 $A=B$;

(3) $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 收敛在于 $\mathbb{R}$ 当且仅当 $A=B\in\mathbb{R}$.

练习. 证明上述命题.

注记. 网的概念可以参考 [**munkres-nets**],[**willard-nets**] 和 [**菲赫金哥尔茨**].

3.9 无穷和

定义 3.9.1. 我们给定一个 Banach 空间 V 和一个集合 X. 若 $f:X\to V$,, 形如

$$\sum_{x\in X}f(x)$$

称为**无穷和**(哪怕 X 是有限集).

定义 3.9.2. 定义 $\operatorname{fin}\left(2^X\right)$ 为 X 所有有限子集构成的集合, 即 $\{A\subseteq X\|A|<+\infty\}$. 易知 $(\operatorname{fin}(2^X),\subseteq)$ 是一个有向集. 令 $v\in V$, 称 $\sum\limits_{x\in X}f(x)$ **收敛**于 v, 若在网的意义下极限

$$\lim_{A\in\operatorname{fin}(2^X)}\sum_{x\in A}f(x)=v$$

存在.

命题 3.9.3. 上述对 $\sum\limits_{x\in X}f(x)$ 收敛于 v 的定义有以下等价描述:

(1) 对于任意$\varepsilon > 0$, 存在$B \in \operatorname{fin}(2^X)$: 对于任意$A \in \operatorname{fin}(2^X)$, $\left(B \subseteq A \implies \left\| v - \sum_{x\in A} f(x) \right\| < \varepsilon\right)$.

(2) 对于任意$\varepsilon > 0$, 存在$B \in \operatorname{fin}(2^X)$: 对于任意$A_1, A_2 \in \operatorname{fin}(2^X)$, $\left(B \subseteq A_1, A_2 \Rightarrow \left\| \sum_{x\in A_1\setminus A_2} f(x) - \sum_{x\in A_2\setminus A_1} f(x) \right\| < \varepsilon\right)$.

(3) 对于任意$\varepsilon > 0$, 存在$B \in \operatorname{fin}(2^X)$: 对于任意$E \in \operatorname{fin}(2^{X\setminus B})$, $\left\| \sum_{x\in E} f(x) \right\| < \varepsilon$.

注意 (2) 其实就是在说 $\left\{\sum_{x\in A} f(x)\right\}_{A\in\operatorname{fin}(2^X)}$ 是 *Cauchy* 网.

证明: (1) 和 (2) 的等价性只是定理 3.8.17的一个特殊情况.
现假设 (2) 成立. 对于 (3), 若 $E \in \operatorname{fin}(2^{X\setminus B})$, 取 $A_1 = B, A_2 = B \cup E$, 则

$$\left\| \sum_{x\in E} f(x) \right\| = \left\| \sum_{x\in A_1\setminus A_2} f(x) - \sum_{x\in A_2\setminus A_1} f(x) \right\| < \varepsilon.$$

现假设 (3) 成立. 对于 (2), 若 $A_1, A_2 \in \operatorname{fin}(2^X) \wedge B \subseteq A_1, A_2$, 取 $E_1 = A_1 \setminus A_2, E_2 = A_2 \setminus A_1$,

$$\left\| \sum_{x\in A_1\setminus A_2} f(x) - \sum_{x\in A_2\setminus A_1} f(x) \right\| \leqslant \left\| \sum_{x\in E_1} f(x) \right\| + \left\| \sum_{x\in E_2} f(x) \right\| < 2\varepsilon.$$

□

命题 3.9.4. 令 $f : X \to [0, +\infty)$, 则

$$\sum_{x\in X} f(x) = \sup\left\{ \sum_{x\in A} f(x) \,\middle|\, A \in \operatorname{fin}(2^X) \right\} \in [0, +\infty]$$

总存在. 若其有限, 记为

$$\sum_{x\in X} f(x) < +\infty.$$

证明: 定义 $y_A = \sum_{x\in A} f(x)$, 其中 $A \in \operatorname{fin}(2^X)$. 回忆

$$\sum_{x\in X} f(x) = \lim_{A\in\operatorname{fin}(2^X)} y_A.$$

则 $\{y_A\}_{A\in \mathrm{fin}(2^X)}$ 显然为 $\mathbb{R}$ 中递增网, 故

$$\lim_{A\in \mathrm{fin}(2^X)} y_A = \sup\left\{y_A \middle| A\in \mathrm{fin}\left(2^X\right)\right\}.$$

$\square$

注记. 值得注意,

$$\sum_{x\in X} f(x) < +\infty \iff \text{存在} M \geqslant 0 : \left(\text{对于任意} A\in \mathrm{fin}(2^X), \sum_{x\in A} f(x) \leqslant M\right).$$

注记. 任意 $\mathbb{R}$ 中递增网 $\{y_\alpha\}_{\alpha\in I}$

- 要么有上界, 此时 $y_\alpha \to \sup\{y_\alpha\} < +\infty$;
- 要么无上界, 此时 $y_\alpha \to +\infty$.

当然, 不论如何, 我们总有

$$\lim_{\alpha\in I} y_\alpha = \sup\{y_\alpha | \alpha\in I\}.$$

命题 3.9.5. 若 $\mathbb{R}$ 中递增网 $\{y_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 有子网 $\{y_{\alpha_s}\}_{s\in S}$, 其中

$$\lim_{s\in S} y_{\alpha_s} = y \in [-\infty, +\infty],$$

则

$$\lim_{\alpha\in I} y_\alpha = y,$$

也就是说,

$$\{y_\alpha\}_{\alpha\in I}\text{有上界} \iff \{y_{\alpha_s}\}_{s\in I}\text{有上界}.$$

附注. 由此可见, 递增网的收敛性, 有界性和上确界可由其任意子网确定.

例子. 假设 $f:\mathbb{Z}^+\to [0,+\infty)$, 则

$$\sum_{x\in \mathbb{Z}^+} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \in [0,+\infty].$$

证明: 令 $y_A = \sum_{x\in A} f(x)$, 其中 $A\in \mathrm{fin}\left(2^X\right)$. 由定义,

$$\sum_{x\in \mathbb{Z}^+} f(x) = \lim_{A\in \mathrm{fin}(2^X)} y_A.$$

令 $A_n=\{1,2,\ldots,n\}$, 则 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 递增且在 2^X 中共尾.
因此,$\{y_{A_n}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$是$\{y_A\}_{A\in\operatorname{fin}(2^X)}$(递增网) 之子网, 则

$$\begin{aligned}\lim_{A\in\operatorname{fin}(2^X)} y_A &= \lim_{n\to+\infty} y_{A_n}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{x\in\{1,2,\ldots,n\}} f(x)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{x=1}^{n} f(x)=\sum_{x=1}^{+\infty} f(x).\end{aligned}$$

□

附注. 若 $f,g:X\to[0,+\infty)$ 且对任意 $x\in X$ 有 $f(x)\leqslant g(x)$, 则

$$\sum_{x\in X} f(x)\leqslant\sum_{x\in X} g(x).$$

定义 3.9.6. 令 $f:X\to[0,+\infty)$ 满足

$$\sum_{x\in X} f(x)<+\infty.$$

定义 $\operatorname{supp}(f)=\{x\in X\big|f(x)\neq 0\}$, 称为**支集 support**.

练习. 在上述定义中, 证明 $\operatorname{supp}(f)$ 是可数集.

定义 3.9.7. 令 $f:X\to V$. 称无穷和 $\sum\limits_{x\in X} f(x)$ **绝对收敛 absolutely converges**, 若

$$\sum_{x\in X}\|f(x)\|<+\infty.$$

定理 3.9.8. 若 $\sum\limits_{x\in X} f(x)$ 绝对收敛, 则其收敛.

证明:

$$\begin{aligned}&\sum_{x\in X}\|f(x)\|<+\infty \iff \sum_{x\in X}\|f(x)\| \text{ 在}\mathbb{R}\text{中收敛}\\ &\implies \text{对于任意}\varepsilon>0,\text{存在}B\in\operatorname{fin}\left(2^X\right):\left(\text{对于任意}A\in\operatorname{fin}\left(2^{X\setminus B}\right),\left\|\sum_{x\in A} f(x)\right\|\leqslant\sum_{x\in A}\|f(x)\|<\varepsilon\right)\\ &\iff \sum_{x\in X} f(x)\text{ 在}V\text{中收敛.}\end{aligned}$$

□

推论 3.9.9. 令 $f:X\to V, g:X\to[0,+\infty)$ 且对任意 $x\in X$ 有 $\|f(x)\|\leqslant g(x)$.
若 $\sum\limits_{x\in X} f(x)<+\infty$, 则 $\sum\limits_{x\in X} f(x)$ 绝对收敛.

命题 3.9.10. 令 $f: X \to \mathbb{R}^N$, 则 $\sum\limits_{x\in X} f(x)$ 收敛当且仅当 $\sum\limits_{x\in X} f(x)$ 绝对收敛.

证明: 记 $f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_N(x)\big) \in \mathbb{R}^N$.
若 $\sum\limits_{x\in X} f(x)$ 绝对收敛, 由定理 3.9.8, $\sum\limits_{x\in X} f(x)$ 显然收敛.
若 $\sum\limits_{x\in X} f(x)$ 收敛, 易知对任意 $1 \leqslant i \leqslant N$ 有 $\sum\limits_{x\in X} f_i(x)$ 收敛.
只要引入以下引理, 便可知 $\sum\limits_{x\in X} |f_i(x)| < +\infty$, 然后由三角不等式

$$\big\|f(x)\big\| \leqslant \big|f_1(x)\big| + \cdots + \big|f_N(x)\big|,$$

可知 $\sum\limits_{x\in X} \big\|f(x)\big\|$ 收敛. □

引理 3.9.11. 令 $f: X \to \mathbb{R}$. 若 $\sum\limits_{x\in X} f(x)$ 收敛, 则 $\sum\limits_{x\in X} |f(x)| < +\infty$.

练习. 证明上述引理. (提示: 可以考虑正负分离).

命题 3.9.12. 考虑 $f: X \to V$. 若 X 无穷可数且 $\sum\limits_{x\in X} f(x)$ 收敛, 则对任意双射 $\varphi: \mathbb{Z}^+ \to X$ 有

$$\sum_{x\in X} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(\varphi(n)).$$

特别地, 若 $\psi: \mathbb{Z}^+ \to X$ 也是双射, 则

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(\varphi(n)) = \sum_{x\in X} f(x).$$

证明: 对任意 $A \in \operatorname{fin}\left(2^X\right)$, 令 $y_A = \sum\limits_{x\in A} f(x)$, 则 $\{y_A\}_{A\in \operatorname{fin}(2^X)}$ 是 X 中的收敛网, 故其任一子网收敛于

$$\lim_{A\in \operatorname{fin}(2^X)} y_A = \sum_{x\in X} f(x).$$

对 $n \in \mathbb{Z}^+$, 令 $A_n = \{\varphi(1), \ldots, \varphi(n)\} \in \operatorname{fin}\left(2^X\right)$, 则 $\{y_{A_n}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 为 $\{y_A\}_{A\in \operatorname{fin}(2^X)}$ 之子网. 因此,

$$\begin{aligned}\sum_{x\in X} f(x) &= \lim_{n\to+\infty} y_{A_n} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{x\in A_n} f(x) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(i)) = \sum_{i=1}^{+\infty} f(\varphi(i)).\end{aligned}$$

□

定义 3.9.13. 若有 $f: \mathbb{Z}^+ \to V$ 和双射 $\varphi: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, 称 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(\varphi(n))$ 为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ 的一个**重排 (rearrangement)**.

推论 3.9.14. 设 $f:\mathbb{Z}^+\to V$ 而 $\varphi:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$ 为双射. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f(n)$ 绝对收敛, 则

$$\sum_{n=1}^{+\infty}f(n)=\sum_{n=1}^{+\infty}f(\varphi(n)).$$

附注. 由上可见, 级数可看成可数集上无穷和的一个" 子网". 若无穷和收敛, 则级数 (以及其任一重排) 收敛到此无穷和的极限. 若无穷和不收敛, 则级数的收敛性和收敛时的极限都不确定, 且其任一重排的情况也可能不一样. 当 $V=\mathbb{R}^N$ 时, 无穷和收敛与级数绝对收敛等价, 即级数绝对收敛也可反过来推出无穷和收敛. 特别地, 若 $V=\mathbb{R}_{\geqslant 0}$, 则可数集上的无穷和与级数无本质区别.

定义 3.9.15. 令 X,Y 为集合,V 为 Banach 空间而 $f:X\times Y\to V$.
若 $g(x)=\sum\limits_{y\in Y}f(x,y)$ 对任意 $x\in X$ 收敛,$\sum\limits_{x\in X}g(x)$ 直接记为 $\sum\limits_{x\in X}\sum\limits_{y\in Y}f(x,y)$.

定理 3.9.16 (Fubini 定理 (Part 1)). *令 X,Y 为集合,V 为 Banach 空间而 $f:X\times Y\to V$. 若 $\sum\limits_{(x,y)\in X\times Y}f(x,y)$ 绝对收敛, 则*

- *对任意 $x\in X$,$\sum\limits_{y\in Y}f(x,y)$ 绝对收敛, 而且*

$$\sum_{(x,y)\in X\times Y}f(x,y)=\sum_{x\in X}\sum_{y\in Y}f(x,y).$$

- *对任意 $y\in Y$,$\sum\limits_{x\in X}f(x,y)$ 绝对收敛, 而且*

$$\sum_{x\in X}\sum_{y\in Y}f(x,y)=\sum_{y\in Y}\sum_{x\in X}f(x,y).$$

.

证明: 注意 $\sum\limits_{(x,y)\in X\times Y}\|f(x,y)\|<+\infty$, 即存在 $M>0$ 使得对任意 $X\times Y$ 的有限子集 S 有 $\sum\limits_{(x,y)\in S}\|f(x,y)\|\leqslant M$. 对任意 $x\in X$, 取 $S=\{x\}\times B$, 其中 B 为 Y 任意有限子集, 可得

$$\sum_{y\in Y}\|f(x,y)\|\leqslant M<+\infty.$$

令 $I=\mathrm{fin}\left(2^X\right), J=\mathrm{fin}\left(2^Y\right)$. 构造 V 中的网 $\{v_{A\times B}\}_{\substack{A\in I\\ B\in J}}$, 其中

$$v_{A\times B}=\sum_{(x,y)\in A\times B}f(x,y)=\sum_{x\in A}\sum_{y\in B}f(x,y).$$

另一方面,$\{v_{A\times B}\}_{(A,B)\in I\times J}$ 是 $\{v_S\}_{S\in\mathrm{fin}(2^{X\times Y})}$ 之子网, 其中

$$v_S=\sum_{(x,y)\in S}f(x,y).$$

因此,

$$\lim_{(A,B)\in I\times J}v_{A\times B}=\sum_{S\in\mathrm{fin}(2^{X\times Y})}v_S=\sum_{(x,y)\in X\times Y}f(x,y)$$

存在. 注意对任意 $A\in\mathrm{fin}\left(2^X\right)$, 由有限和与极限之可交换性, 有

$$\lim_{B\in\mathrm{fin}(2^Y)}v_{A\times B}=\lim_{B\in\mathrm{fin}(2^Y)}\sum_{x\in A}\overbrace{\sum_{y\in B}f(x,y)}^{\text{显然绝对收敛}}=\sum_{x\in A}\sum_{y\in Y}f(x,y)$$

存在. 由累次极限定理,

$$\lim_{(A,B)\in I\times J}v_{A\times B}=\lim_{A\in I}\lim_{B\in J}v_{A\times B}=\lim_{A\in I}\sum_{x\in A}\sum_{y\in Y}f(x,y)=\sum_{x\in X}\sum_{y\in Y}f(x,y).$$

□

定理 3.9.17 (Fubini 定理 (Part 2))**.** *令 X,Y 为集合,V 为 Banach 空间而 $f:X\times Y\to V$.*

$$\sum_{(x,y)\in X\times Y}\|f(x,y)\|<+\infty$$

当且仅当

$$\sum_{y\in Y}\|f(x,y)\|<+\infty\ \text{对任意}x\in X\text{成立且}\sum_{x\in X}\sum_{y\in Y}\|f(x,y)\|<+\infty.$$

证明: 若 $\sum_{(x,y)\in X\times Y}f(x,y)$ 绝对收敛, 由定理 3.9.16, 后者显然成立.

现假设后者成立. 将 $f(x,y)$ 换成 $\|f(x,y)\|$, 可不妨设 $f:X\times Y\to[0,+\infty)$. 对任意 $S\in\mathrm{fin}\left(2^{X\times Y}\right)$, 可取 $A\in\mathrm{fin}\left(2^X\right)$ 和 $B\in\mathrm{fin}\left(2^Y\right)$ 满足 $S\subseteq A\times B$ (可直接设 A 和 B 分别为 S 在 X 中和在 Y 中的取值), 则

$$\sum_{(x,y)\in S}f(x,y)\leqslant\sum_{x\in A}\sum_{y\in B}f(x,y)\leqslant\sum_{x\in A}\sum_{y\in Y}f(x,y)\leqslant\underbrace{\sum_{x\in X}\sum_{y\in Y}f(x,y)}_{\text{记为}M}<+\infty.$$

因此,

$$\sum_{(x,y)\in X\times Y}f(x,y)\leqslant M<+\infty.$$

□

推论 3.9.18. *令 $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to V$, 则以下命题等价:*

- $\displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \|f(m,n)\| < +\infty$,
- $\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f(m,n)\| < +\infty$,
- $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \|f(m,n)\| < +\infty$.

证明: 注意到非负可数无穷求和与其对应的级数一样, 因此后两者等价. $\square$

命题 3.9.19. 若以上等价命题成立, 则

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(m,n) = \sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} f(m,n) = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} f(m,n),$$

进一步也等于

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} f(m,n)$$

和

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{k} f(j,k-j) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\substack{m+n=k\\ m,n\geqslant 0}} f(m,n).$$

附注. 将 $f(m,n)$ 替换成 $\|f(m,n)\|$, 并应用上述结论, 有

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left\|\sum_{j=0}^{k} f(j,k-j)\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{k}\|f(i,k-i)\| < +\infty$$

绝对收敛.

证明: 现对命题中最后一个等式进行解释. 可构造双射

$$\varphi: \begin{aligned} \mathbb{N}\times\mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ (m,n) &\mapsto \sum_{k=1}^{m+n} k + m. \end{aligned}$$

注意到 φ^{-1} 也是双射, 由 $\displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(m,n)$ 收敛, 可知其值等于 $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} f(\varphi^{-1}(k))$.

令 $A_\ell = \displaystyle\sum_{k=0}^{\ell}\sum_{j=0}^{k} f(j,k-j)$, 则 $\{A_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ 是 $\left\{f(\varphi^{-1}(0)) + f(\varphi^{-1}(1)) + \cdots + f(\varphi^{-1}(k))\right\}_{k\in\mathbb{N}}$

子列, 因此 $\{A_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ 收敛于 $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} f(\varphi^{-1}(k)) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(m,n)$. $\square$

命题 3.9.20. 设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ 和 $g(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_nz^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2. 令 $R=\min\{R_1,R_2\}$, 则 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{j=0}^{k}a_jb_{k-j}\right)z^k$ 对任意 $0\leqslant|z|<R$ 绝对收敛到 $f(z)g(z)$. 也就是说, 其收敛半径不小于 R.

证明: 假设 $0\leqslant|z|<R$, 则有

$$\sum_{m=0}^{+\infty}|a_m|\cdot|z|^m,\sum_{n=0}^{+\infty}|b_n|\cdot|z|^n<+\infty.$$

考虑 $c_{m,n}=a_mb_nz^{m+n}$, 则

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}|c_{m,n}|=\sum_{m=0}^{+\infty}\left|a_mz^m\right|\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left|b_nz^n\right|\right)=\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\left|a_mz^m\right|\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left|b_nz^n\right|\right)<+\infty.$$

由定理 3.9.17, $\sum\limits_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}c_{m,n}$ 绝对收敛, 故 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{j=0}^{k}a_jb_{k-j}\right)z^k$ 绝对收敛到

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}a_mb_n\cdot z^m\cdot z^n=\sum_{m=0}^{+\infty}a_mz^m\cdot g(z)=f(z)\cdot g(z).$$

□

例子. 对任意 $z,w\in\mathbb{C}$,

$$e^z\cdot e^w=e^{z+w}.$$

证明: 我们相当于证明

$$\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{z^m}{m!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{w^n}{n!}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(z+w)^k}{k!}.$$

事实上,

$$\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{z^m}{m!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{w^n}{n!}\right)=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^m\cdot w^n}{m!\cdot n!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{k}\frac{z^m\cdot w^{k-m}}{m!\cdot(k-m)!},$$

其中中间那个级数之绝对收敛性可由 $e^{|z|}\cdot e^{|w|}$ 控制得到. 接下来用二项式定理, 则命题可证. □

第四章　函数连续性

X, Y 在本章中表示度量空间.

定义 4.0.1. 考虑度量空间 X 和 $E \subset X$. 称 $p \in X$ 是 E (在 X 中的) 一个**聚点/极限点 (limit/accumulation/cluster point)**, 若对任意 $r > 0, B_X(p,r)$ 与 $E \setminus \{p\}$ 相交, 即对任意 $r > 0$ 存在 $x \in E$ 使得 $0 < d(x,p) < r$. 我们将 E 所有这样的聚点组成的集合称作 E 的导集, 记为 E'.

定义 4.0.2. 若 $p \in E \setminus E'$, 则称 p 是 E 的**孤立点 (isolated point)**. 这等价于存在 $r > 0$ 使 $E \setminus \{p\} \cap B_X(p,r) = \varnothing$, 即 $B_E(p,r) = \{p\}$.

附注. 孤立点可以对一个度量空间本身谈论, 而聚点必须是关于度量空间的子集的.

例子. $\mathbb{Z}$ 中任何一个点都是孤立点.

练习. $p \in X$ 是 E 的聚点当且仅当存在 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \subseteq E \setminus \{p\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = p$.

注记. 对于一个函数, 它在某些点可能没有定义, 但我们可以在其定义域的聚点上定义函数值.

定义 4.0.3. 设 X, Y 为度量空间,$E \subset X, p \in E', q \in Y$ 且 $f : E \to Y$. 称 f 在 p 处极限为 q, 并记 $\lim\limits_{x\to p} f(x) = q$, 若

$$\text{对于任意}\varepsilon > 0, \text{存在}\delta > 0 : \text{对于任意}x \in E, (0 < d(x,p) < \delta \implies d\big(f(x), q\big) < \varepsilon).$$

我们现在来构造一个 p 邻域 E 上的网.

定义 4.0.4. 对 $x, y \in E \setminus \{p\}$, 有序关系 $y \lesssim x$ 当且仅当 $d(x,p) \leqslant d(y,p)$, 则 $(E \setminus \{p\}, \lesssim)$ 为一个预序集,$\{f(x)\}_{x\in E\setminus\{p\}}$ 是 Y 中的一个网. 从而我们有如下断言.

命题 4.0.5. $\lim\limits_{x\in E\setminus\{p\}} f(x) = q \iff \lim\limits_{x\to p} f(x) = q$.

证明: $\lim\limits_{x\in E\setminus\{p\}} f(x) = q$ 的含义为

$$\text{对于任意}\varepsilon > 0, \text{存在}y \in E \setminus \{p\} : \text{对于任意}x \in E \setminus \{p\}, \big(x \gtrsim y \implies d(f(x), q) < \varepsilon\big).$$

先假设 $\lim\limits_{x\in E\setminus\{p\}} f(x) = q$. 给定 $y \in E \setminus \{p\}$, 取 $\delta = d(y,p)$ 则满足条件.

现假设 $\lim\limits_{x\to p} f(x) = q$. 给定 $\delta > 0$, 取任意 $y \in E$ 满足 $0 < d(y,p) < r$ 则满足条件. □

推论 4.0.6. $\lim\limits_{x\to p} f(x)$ 若存在则唯一.

推论 4.0.7. 设 Y 柯西完备 (例如 $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$), 则 $\lim\limits_{x\to p} f(x)$ 存在当且仅当

$$\text{对于任意}\varepsilon > 0, \text{存在}\delta > 0: \text{对于任意}x, y \in E, \Big(0 < d(x,p), d(y,p) < \delta \implies d\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon.\Big)$$

证明: $\lim\limits_{x\in E\backslash\{p\}} f(x)$ 存在的 *Cauchy* 条件为对于任意$\varepsilon > 0$, 存在$z \in E\backslash\{p\}$, 对于任意$x, y \in E$, 若 $0 < d(x,p), d(y,p) < d(z,p)$, 则 $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$,$\delta$ 与 z 之间可互相如前一命题互相给出. □

推论 4.0.8. 令 Y 为赋范空间. 假设 $f: E \to Y, g: E \to Y, p$ 为 E 聚点, 且 $\lim\limits_{x\to p} f(x) = A, \lim\limits_{x\to p} g(x) = B$ 存在, 则

(1) $\lim\limits_{x\to p}(f(x) + g(x)) = A + B$;

(2) 若 $\lambda: E \to \mathbb{R}$或$\mathbb{C}$, $\lim\limits_{x\to p} \lambda(x) = \mu$ 则 $\lim\limits_{x\to p} \lambda(x) f(x) = \mu A$;

(3) 若 $\lambda: E \to \mathbb{R}$或$\mathbb{C}$, $\lim\limits_{x\to p} \lambda(x) = \mu$ 且对 对于任意$x \in E \setminus \{p\}$ 有 $\lambda(x) \neq 0$且$\mu \neq 0$, 则 $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{1}{\lambda(x)} f(x) = \dfrac{1}{\mu} f(x)$;

(4) 若 $Y = \mathbb{R}$, 且 对于任意$x \in E \setminus \{p\}$ 有 $f(x) \leqslant g(x)$, 则$A \leqslant B$, 即 *Squeeze Lemma* 成立.

定理 4.0.9. 令 $E \subset X, p \in E', f: X \to Y, q \in Y, X, Y$ 为度量空间, 我们有以下命题等价:

(1) $\lim\limits_{x\to p} f(x) = q$;

(2) 对于任意$E \setminus \{p\}$ 中的网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$, 若 $\lim\limits_{\alpha} x_\alpha = p$, 则 $\lim\limits_{\alpha} f(x_\alpha) = q$.

(3) 对于任意$E \setminus \{p\}$ 中点列 $\{x_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = p$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = q$.

证明: 我们先来证 (1) $\implies$ (2), 令 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset E \setminus \{p\}.x_\alpha \to p$, 对于任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 对于任意$x \in E\backslash\{p\}$, 若 $d\big(f(x), q\big) < \varepsilon$, 则因为 $x_\alpha \to p$, 对于 δ,存在$\beta \in I$, 对于任意$\alpha \geqslant$ 有 $d(x_\alpha, p) < \varepsilon$, 故 $d(f(x_\alpha), q) < \varepsilon$.
而 (2) $\longrightarrow$ (3) 是显然的.
我们下面来证 (3) $\longrightarrow$ (1), 我们只需证若 (1) 不成立, 则 (3) 也是不成立的.
存在$\varepsilon > p$, 对于任意$\delta > 0$, 存在$x \in E \setminus \{p\}$, 满足 $d(x,p) < \delta$ 且 $d\big(f(x), q\big) > \varepsilon, x_1 \in E \setminus \{p\}$, 我们来构造一个数列 $\{x_n\} \subset E \setminus \{p\}$, 若 $x_1, x_2, \cdots, x_n - 1 \in E \setminus \{p\}$ 已取好, 取 x_n 满足 $d(x_n, p) < \frac{1}{n}$ 且 $d(f(x_n), q) > \varepsilon > 0$, 于是 $x_n \to p$, 但 $f(x_n) \nrightarrow q$, 从而 (3) 不成立. □

例子. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$(取 E=$\mathbb{R}$),

$$f(x)=\begin{cases}x, & 若x\leqslant 0;\\ 1+x, & 若x>0\end{cases}$$

, 令 $a_n=-\frac{1}{n},b_n=\frac{1}{n}$ 则 $\frac{1}{n}$ 则 $\{a_n\}\{b_n\}\subset\mathbb{R}\setminus\{0\},a_n\to 0,b_n\to 0$, 但 $f(a_n)=-\frac{1}{n}\to 0,f(b_n)=1+\frac{1}{n}\to 1$, 故 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在,(不然极限会等于 0 和 1).

例子. 令 X 为度量空间,$A\subset X$, 定义 $\chi_A:X\to\mathbb{R}$ $f(x)=\begin{cases}1, & 若n\in A;\\ x, & 若x\in X\setminus A\end{cases}$ 称为 A 的特征函数.

命题 4.0.10. 假设 $p\in X$ 是 A 和 $X\setminus A$ 的聚点 (例如 $X=\mathbb{R}^2,A=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\},p=(0,1)$), 则 $\lim\limits_{x\to p}\chi_A(x)$ 不存在.

证明: 因 p 是 A 和 $X\backslash A$ 的聚点,存在$\{x_n\}\subset A\backslash\{p\}.\{y_n\}\subset X\backslash(A\cup\{p\}).x_n\to p,y_n\to p$. 但 $\chi_A(x_n)=1\to 1,\chi_A(y_n)=0\to 0$ □

定义 4.0.11. 令 $f:X\to Y,p\in X$, 我们说 f 在 p **处连续**, 若以下二者之一成立.

(1) p 是 X 的孤立点.

(2) p 是 X 的聚点, 且 $\lim\limits_{x\to p}f(x)=f(p)$.

等价定义: $f:X\to Y$ 在 p 处连续, 若 对于任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 对于任意$x\in X$, 若 $d(x,p)<\delta$, 则 $d(f(p),f(x))<\varepsilon$(注意这里不需要 $x\neq p$, 因为当 $x=p$ 时,$d(f(p),f(x))<\varepsilon$ 自动满足, 故在 $p\in X'$ 时加不加 $x\neq p$ 没区别, 但允许 x=p 能把孤立点情形包括进来).

练习. 等价性证明的细节留给读者.

注记. 若 $f:X\to Y,B\subset Y$, 则 $f^{-1}(B)=\{x\in X:f(x)\in B\}$ 称为 B 的**原象**. **等价定义**:$f:X\to Y$ 在 p 处连续, 若对任意 $q=f(p)$ 处开球 $B_Y(q,\varepsilon)$ 存在 p 处开球 $B_X(p,\varepsilon)$ 使 $B_X(p,\delta)\subset f^{-1}(B_y(q,\varepsilon))$.

证明: $B_X(p,\delta)\subset f^{-1}(B_Y(q.\varepsilon))\iff$ 对于任意$x\in B_X(p,\delta)$, 有 $f(x)\in B_Y(q,\varepsilon)\iff$ 对于任意$x\in B_X(p,\delta)$, 有 $f(x)\in B_Y(q,\varepsilon)\iff$ 对于任意$x\in X$ 若 $d(p,x)<\varepsilon$ 则 $d(f(p),f(x)<\varepsilon$. □

定义 4.0.12. 令 $A\subset X$. 若 $p\in A$, 称为 A 的**内点 interior point**, 若 存在$\delta>0$, 使 $B_X(p,\varepsilon)\subset A$, 即 A 包含球心位于 p 处的一个 X 的开球. **等价定义**:$f:X\to Y$ 在 p 处连续, 对于任意 $q=f(p)$ 为中心的开球 $B_Y(q,\varepsilon),p$ 是 $f^{-1}(B_y(q,\varepsilon))$ 的内点.

定义 4.0.13. 等价定义 $f: X \to Y$ 在 p 处连续 $\iff \lim\limits_{x \in J_p} f(x) = f(p), J_p = (x, \lesssim)$. 若 $x, x' \in X$, 则 $x \lesssim x' \iff d(p, x') \leqslant d(p, x)$.

定义 4.0.14. 等价定义:$f: X \to Y$ 在 p 处连续 $\iff$ 对于任意X 中的网 $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$, 若 $x_\alpha \to p, f(x_\alpha) \to f(p) \iff$ 对 对于任意 点列 $\{x_n\}$, 若 $x_n \to p$, 则有 $f(x_n) \to f(p)$

定义 4.0.15. 我们称 $f: X \to Y$ 是连续的, 若其处处连续.

例子. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f$ 为关于 z 的多项式, 那么 f 是一个连续函数.

定义 4.0.16. X, Y, Z 为度量空间,$f: X \to Y$ 在 p 处连续.$g: Y \to Z$ 在 $q = f(p)$ 处连续, 则 $g \circ f: X \to Z$ 在 p 处连续.

证明: 令 $\{x_n\} \subset X, x_n \to p, f(x_n) \to f(p) \longrightarrow g(f(x_n)) \to g \circ f(p)$. □

例子. $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty), f(x) = \sqrt{x}$ 是连续的, 因为 (a, b) 的原像为 (a^2, b^2).

例子. 对于任意$1 \leqslant i \leqslant n, f_i: X_i \to Y_i$, 则 $f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n: X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n$ 连续 $\iff$ 每一个 f_i 均是连续的.

例子. $\Pi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \to \max\{x_1, x_2\}$. 注意到 $\max\{x_1, x_2\} = \dfrac{|x_1 - x_2| + |x_1 + x_2|}{2}$, 故 Π 是连续的.

例子. 若有有限个实值函数是连续的, 则它们的最大值函数也是连续的.

第五章　拓扑空间

5.1　基本概念

定义 5.1.1. 令 X 为度量空间, 子集 $E \subset X$, 称为开集若 E 的每个点 P 都是内点, 即存在$\delta > 0$, 使 $B_x(p,\delta) \subset E$.E 称为**闭集**. 定义 $X \setminus E$ 是**开集**. 这又等价于 对于任意$p \notin E$, 存在$\delta > 0$, 使 $B_x(p,\delta) \cup E = \varnothing$(值得注意的是, p 是 E 的一个内点, $\Longleftrightarrow$ 存在 包含 p 的一个开球 $B_X(q,r)$ 在 E 内 (但无需 p 是 $B_X(q,r)$ 的球心)).

例子. $(a,b), (-\infty,a) \cup (b,\infty))$ 是 $\mathbb{R}$ 中的开子集, 故 $[a,b]$ 是 $\mathbb{R}$ 中的闭子集, 而 $[a,b)$ 不是 $\mathbb{R}$ 中的开集. 因为 a 不是内点.

例子. $B_X(p,\delta)$ 是 X 中开集.

定义 5.1.2. $\mathcal{T}$ 是 X 中的开集构成集合, 称 $\mathcal{T}$ 是 X 的一个**拓扑**, 若其满足以下性质:

(1) $\varnothing \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$;

(2) $\mathcal{T}$ 中任意多 (包括不可数个) 个元素的并在 $\mathcal{T}$ 中;

(3) $\mathcal{T}$ 中有限多个元素的交集在 $\mathcal{T}$ 中.

命题 5.1.3. *度量空间上以内点定义的所有开集组成的集合是一个拓扑.*

证明: 假设 $\{\Omega_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ 是 X 中的一族开集, 对于任意$x \in \bigcup\limits_\alpha \Omega_\alpha$, 存在$\beta \in \mathcal{A}$ 使 $x \in \Omega_\beta$. 则 $x \in$ "X 中某开球" $\subset \Omega_\beta$, 故 $x \in$ "X 中某开球" $\subset \bigcup\limits_\alpha \Omega_\alpha$. 故 x 是 $\bigcup\limits_\alpha \Omega_\alpha$ 内点.$\bigcup\limits_\alpha \Omega_\alpha$ 是开集.

若 Ω_1, Ω_2 是 X 中开集,对于任意$x \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, 取 X 中开球 U_i 满足 $x \in V \in U_1 \subset \Omega_i (i = 1,2)$, 易知 存在 X 中开球 V 满足 $x \in V \subset U_1 \cap U_2$. 故 $x \in V \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$. 故 x 是 $\Omega_1 \cap \Omega_2$ 的内点, 故 $\Omega_1 \cap \Omega_2$ 开. □

以上证明过程中我们只用到了如下性质:

定义 5.1.4. 令 X 为一个集合, 称 2^X 的子集 $\mathcal{B}$ 是一个**拓扑基 (base/basis of a topology)**, 若其满足以下条件:

(1) 对于任意$U_1, U_2 \in \mathcal{B}$,对于任意$x \in U_1 \cap U_2$,存在$V \in \mathcal{B}$ 使 $x \in V \subset U_1 \cap U_2$.

(2) 对于任意$x \in X$,存在$U \in \mathcal{B}$, 使得 $x \in U$.

命题 5.1.5. *X 是一个集合,$\mathcal{B} \subset 2^X$ 为一个拓扑基, 令 $\mathcal{T} = \{\Omega \subset X :$ 对于任意$x \in \Omega$, 存在$U \in \mathcal{B}$使$x \in U \subset \Omega\}$, 则 $\mathcal{T}$ 是 X 上的一个拓扑, 称 $\mathcal{T}$ 为 $\mathcal{B}$* **生成的拓扑**. *而 $\mathcal{B}$是拓扑$\mathcal{T}$ 中的一个***基**.

例子. *若 X 为度量空间, 则度量生成的拓扑就是 X 中所有开球生成的拓扑.*

定义 5.1.6. 若 $\mathcal{T}$ 是 X 上的拓扑, 则 $(X, \mathcal{T})$ 称为一个拓扑空间 (或者简记为 X 本身),$\mathcal{T}$ 中的元素称为**开集**.

定义 5.1.7. 称开集的补集 U 是**闭集**, 若 $E \subset X$,$x \in E$.x 称为 E 的内点, 若 存在 开集 $\Omega \subset X$ 满足 $x \in \Omega \subset E$(若 $\mathcal{B}$ 是 X 的拓扑, 则 x 是 E 的内点 $\iff$ 存在$\Omega \in \mathcal{B}$ 满足 $x \in \Omega \subset E$).

注记. 任意有限多个闭集之并为闭集, 任意多个闭集之交为闭集.

定义 5.1.8. $x \in X$ 的**邻域 (neighborhood)** 为包含 x 的一个开子集 Ω.

注记. 数学中关于邻域的定义不一致, 有些人用的定义更弱:$u \subset X$ 是 x 邻域，意为 x 是 U 内点, 这种定义下的开邻域对应我们这里的邻域.

定义 5.1.9. 若 X 是一个拓扑空间, 称 $E \subset X, x \in X$ 是 E 的**聚点**, 若 x 的任意邻域 U 满足 $E \cap U \setminus \{x\} \neq \varnothing$. 记 X 的子集 E 的聚点组成的集合为 E'. 定义 E 的**闭包** $\overline{E}$为$\overline{E} = E \cup E'$. 易知对 对于任意$x \in X$, 有 $x \in \overline{E} \iff x$ 的任意邻域 U 与 E 相交.

命题 5.1.10. *$\overline{E}$ 是 X 的一个闭子集, 且若 $E \subset F \subset X$ 且 F 是闭集, 则 $\overline{E} \subset F$.*

证明: 若 $x \in X \setminus \overline{E}$ 则 x 有邻域 U 与 E 不相交, 故也与 $\overline{E}$ 不相交 (不然，若 $y \in \overline{E} \cap U$, 则 U 作为 $\overline{E}$) 内元素 y 的邻域, 由 $x \in E \iff x$ 的任意邻域 U与E 相交, 故 y 的邻域与 E 相交, 矛盾), 故 $x \in u \subset X \setminus \overline{E}$. 故 $X \setminus \overline{E}$ 开, $\overline{E}$ 闭.
若 $E \subset F \subset X$ 且 F 闭, 取任意 $x \in \overline{E}$, 我们证明 $x \in F$. 若 $x \notin F$, 因 $X \setminus F$ 开,$X \setminus F$ 是 x 邻域, 且与 E 不相交. 这与 $x \in \overline{E}$ 矛盾. □

推论 5.1.11. *令 $E \subset X$, 则 E是闭集 $\iff \overline{E} = E \iff E' \subset E$, 故 E 闭 $\iff E$ 的每个聚点都属于 E.*

证明: 若 E 闭, 则 $\overline{E}$ 作为包含 E 的最小闭集, 必须有 $\overline{E} \subset E$, 故 $\overline{E} = E$.
若 $E = \overline{E}$, 因 $\overline{E}$ 闭, 故 E 闭. □

例子. *$E = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{Z}_+\}$ 不是 $\mathbb{R}$ 的闭子集, 因为 $0 \in E'$,但$0 \notin E$. 我们有 $\overline{E} = E \cup \{0\}$.*

例子. $(0,1)$ 在 $\mathbb{R}$ 中的闭包是 $[0,1]$, 在 $(0,+\infty)$ 中的闭包是 $(0,1]$.

例子. $[0,1)$ 在 $\mathbb{R}$ 中非开非闭 (0 不是内点，1 是聚点但不在 $[0,1)$ 内),$[0,1)$ 在 $[0,+\infty)$ 内是开的, 在 $(-\infty,1)$ 内是闭的.

下面我们来定义拓扑空间中网收敛的概念:

定义 5.1.12. 若 $\{x_\alpha\}_{x\in I}$ 是 X 中的网,$x\in X$, 称 $\lim\limits_{\alpha\in I} x_\alpha = x$. 若对 对于任意$x$ 的邻域 U,存在$\beta\in I$, 使 对于任意$\alpha\geqslant\beta$ 有 $x_\alpha\in U$.

命题 5.1.13. *令 $E\subset X, x\in X$, 则以下命题是等价的:*

(1) $x\in\overline{E}$;

(2) 存在 E 中的网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是收敛于 x.

注记. 若 X 是度量空间, 则网可以等价的改为点列.

证明: 若 (1) 成立, 我们来证 (2) 成立.$x\in\overline{E}$, 令 $I=\{$包含 x 的邻域$\}$, 预序关系为“$\supset$” .对于任意$U\in I$, 存在$x_U\in U\cap E$. 故 $(x_U)_{U\in I}$ 是 E 中网且收敛到 x.
假设 (2) 成立,对于任意x 的邻域 U,存在$\alpha\in I$ 使 $x_\alpha\in U$, 而$x_\alpha\in E$, 于是总有$(U\setminus\{x\})\cap E\neq\varnothing$. 于是 $x\in\overline{E}$. □

推论 5.1.14. *$E=\overline{E} \iff E$ 中的任意收敛网收敛到 E 中的元素. 若 X 为度量空间, 则 $E=\overline{E} \iff E$ 中任意收敛点列收敛到 E 中收敛到 E 中元素 (即紧性等价于列紧性)*

注记. 这一推论揭示了 ‘闭’ 的含义: 闭集对取极限是封闭的, 即其取值不会在 E 外面.

下面我们类似先前定义拓扑空间上的连续函数:

定义 5.1.15. $f: X\to Y, x\in X$. 称 f 在 x 处是**连续**的, 若 对于任意$f(x)$ 在 Y 中的邻域 V, x 是 $f^{-1}(V)$ 的内点. 进一步地, 若 f 是处处连续的, 则称 f 是连续的. 这还等价于对于任意Y中的开集V, $f^{-1}(V)$ 是 X 的开集 $\iff$ 对于任意Y 中的任意闭集,$f^{-1}(F)$ 是 X 的闭集 (若 $\mathcal{B}$ 生成 Y 的拓扑, 则只需对任意包含 y 的 $V\in\mathbb{B}$ 即可).
换言之,对于任意$f(x)$ 邻域 $V\subset Y$,存在 x 邻域 $u\subset X$,对于任意$p\in U$ 有 $f(p)\in V$.

命题 5.1.16. *对于 $f: X\to Y$, 我们有以下命题等价:*

(1) f 在 x 处是连续的.

(2) 对于任意X 中的网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$. 若 $x_\alpha\to x$ 则 $f(x_\alpha)\to f(x)$.

附注. 若 X 是度量空间, 则以上等价可写为:

(1) f 在 x 处连续.

(2) 对任意 X 中网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 若对于任意 $\varepsilon'>0$, 存在 $\beta'\in I$, 使得对任意 $\gamma\geqslant\beta'$,$|x_\gamma-x|<\varepsilon'$, 则存在 β,ε, 对任意 $\gamma\geqslant\beta$, 有 $|f(x_\gamma)-f(x)|<\varepsilon$.

证明: (1) $\implies$ (2), 与度量空间情形类似, 只需要将网的 $\varepsilon-\delta$ 语言换为网的邻域语言即可.

再来看 (2) $\implies$ (1). 令 $I_x=\{(U,p):U\subset X$ 是 x 邻域, $p\in U\}$. 定义预序关系为 $\supset$, 即若 $U\supset U'$ 则定义 $(u,p)\leqslant(u',p')$. 定义 $\{x_\alpha\}$ 如下: 若 $\alpha=(U,p)$, 则 $x_\alpha=p$, 故 I_x 中元素可写为 (U,x_α). 则 $\lim\limits_{\alpha\in I_\alpha}x_\alpha=x$. 由假设就有 $\lim\limits_{\alpha}f(x_\alpha)=f(x)$. 故 对于任意$f(x)$ 邻域 $V\subset Y$,存在$\alpha=(U,x_\alpha)\in I_x$, 使得 $\beta=(U',x_\beta)\geqslant\alpha$, 有 $f(x_\beta)\in V$. 故 $p=x_\alpha\in U$, 令 $\beta=(U,p)$, 有 $f(p)=f(x_\beta)\in V$. □

定义 5.1.17. $f:X\to Y$ 称为**同胚 homomorphism**, 若 f 是双射,f 和 f^{-1} 都连续.

命题 5.1.18. *$f:X\to Y$ 双射, 则以下命题是等价的:*

1. *f 是同胚;*
2. *对于任意$U\subset X,U$ 在 X 中是开集 $\iff$ $f(u)$ 在 Y 中是开集;*
3. *对于任意$E\subset X,E$ 在 X 中是闭集 $\iff$ $f(E)$ 在 Y 中是闭集;*
4. *对于任意X 中的网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$,对于任意$x\in X$,$x_\alpha\to x \iff f(x_\alpha)\to f(x)$;*
5. *(若 X,Y 是度量空间)对于任意X 中的点列 $\{x_n\}$,对于任意$x\in X,x_n\to x\iff f(x_n)\to f(x)$.*

以上命题的证明是简单的. 特别地, 应用到恒同映射到 X 上两个拓扑 $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2$ 上,$id:(X,\mathcal{T}_1)\to(X,\mathcal{T}_2)$, 则有:

推论 5.1.19. *令 $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2$ 是 X 上两个拓扑, 则以下命题等价:*

1. *$id:(X,\mathcal{T}_1)\to(X,\mathcal{T}_2)$ 是同胚;*
2. *$\mathcal{T}_1=\mathcal{T}_2$;*
3. *任意中的网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in X}$,对于任意$x\in X,x_\alpha\xrightarrow{\mathcal{T}_1}x\iff x_\alpha\xrightarrow{\mathcal{T}_2}x$;*

   附注. 这说明网收敛决定拓扑.
4. *($(X,\mathcal{T}_1),(X,\mathcal{T}_2)$)是**可度量化的**)若对任意 X 中的点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 对于任意$x\in X,x_n\xrightarrow{\mathcal{T}_1}x\iff x_n\xrightarrow{\mathcal{T}_2}x$.*

例子. 一个空间上的两个等价度量诱导出的拓扑在恒等映射下是同胚的.

例子. 若 (X,d) 为度量空间, 令 $\delta=\frac{d}{1+d}$. 由于 d 与 δ 相同的单调性, 故 (X,d) 与 (X,δ), 给出相同的拓扑, 尽管两个度量不一定等价.

附注. d 一般是无界, 而 δ 是有界的.

定义 5.1.20. X,Y 是拓扑空间, 它们称为**同胚的 (homeomorphic)** 的, 若存在 X,Y 之间的同胚映射 $f:X\to Y$.

例子. 拓扑学家喜欢的甜甜圈与咖啡杯同胚.

例子. 三角形与圆同胚.

命题 5.1.21. 若映射 $f:X\to Y, g:Y\to Z$ 是连续的则 $g\circ f:X\to Z$ 亦是连续的.

证明: 考虑 Z 中开集 V, 由 f,g 的连续性, 故 $f^{-1}(V)$ 是 Y 中开集, 故 $f^{-1}(g^{-1}(V))$ 是开集. □

定义 5.1.22. 令 X 是拓扑空间,$E\subset X$, 定义 E 上的**子空间拓扑**如下:E 中开集为所有形如 $E\cap U$ 的子集, 其中 U 为 X 的开子集. 因此 E 中闭集为 $E\cap X$ 中的闭集.

附注. 事实上, 子空间拓扑可以由以下性质唯一决定: 若 $\{x_\alpha\}_{\alpha\subset E}, x\in E$, 则 $x_\alpha\xrightarrow{E}X \iff x_\alpha\xrightarrow{X}x$.

命题 5.1.23. 令 $X\subset Y($ 开/闭 $)$,对于任意$\Omega\subset X$,Ω 在 X 是开/闭集 $\iff$ Ω 在 Y 是开/闭集.

证明: 对 $\Omega=\Omega\cap X\implies$ 已知 $\Omega\subset X$ 是开 (闭) 集,$\Omega=X\cap\widetilde{\Omega},\widetilde{\Omega}\subset Y$ 是开 (闭) 集,Ω是Y下的开 (闭) 集. □

命题 5.1.24. 若 $f:X\to Y$ 是拓扑空间, 若 $E\subset X, E\subset Y$ 有 $f(E)\subset F$, 则 f 在子集 E 上的限制 $f|_E:E\to F$ 是连续的.

定义 5.1.25. 拓扑空间 X 称为 Hausdorff 空间, 若 对于任意$x,y\in X, x\neq y\implies$ 存在x的邻域 U,Y 的邻域 V 使得 $U\cap V=\varnothing$.

Hausdorff 空间可以理解为两个点是可以分开的, 也就是说两个点有不相交的开邻域.

例子. 度量空间是 Hausdorff 空间.

在一个 Hausdorff 空间中, 单点集是闭集.

例子. X 是集合,$|X| \geqslant 2$,$\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$ 称为平凡拓扑是满足 X 中任意网可以收敛到任意点的唯一拓扑, 其不是 Hausdorff 空间, 故而一定不可以度量.

例子. X 是 Hausdorff 空间 $\iff$ 对于任意X 中的网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$, 若 $x_\alpha \to x$, 且 $x_\alpha \to x'$, 则 $x = x'$. 后者可以描述为一个网至多收敛到一个元素.

例子. X 是集合, $\mathcal{T} = \{\varnothing\} \cup \{X\backslash, E \subset X, |E| < +\infty\}$ 为余有限拓扑.

例子. $\mathbb{F} = \mathbb{R}或\mathbb{C}$, $X = \mathbb{F}^N$,$\mathbb{F}$ 上的 N 元多项式 p, 令 $Z(P) = \{x \in X|p(x) = 0\}$,$\mathcal{T} = \{X \setminus Z(p) \mid p是\mathbb{F}上的N元多项式\}$. 这个拓扑被称为 Zariski 拓扑, 其不是 Hausdorff 的.

例子. 令 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 是一族拓扑空间,$S = \prod_\alpha \in \mathcal{A}X\alpha = \{\mathcal{A}上的函数, f(\alpha) \in X_\alpha\}$.$\mathcal{B} = \{\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha | U_\alpha是X_\alpha$ 上的开集, 且除了有限多个 α之外其它α满足$U_\alpha = X_\alpha\}$, 可以验证 $\mathcal{B}$ 是一个拓扑基, 其生成的拓扑称作 S 上的乘积拓扑.

例子. 若 $S = X_1 \times X_2 \times \cdots X_N$, 则 $\mathcal{B} = \{U_1 \times \cdots \times U_N \,|\, U_1 \subset X_1, \cdots U_N \subset X_N是开集\}$.

例子. 若 $S = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$, 则 $\mathcal{B} = \{U_1 \times \cdots \times X_N \times X_{N+1} \times X_{N+2} \times \cdots \,|\, U_1 \subset X_1, \cdots U_N \subset X_N是开集\}$.

命题 5.1.26. S 上的积拓扑是 (唯一地) 满足以下条件的拓扑.
若 $\{x_\mu\}_{\mu\in I}$ 是 S 中的网,$x \in S$, 则 $\lim_\mu x_\mu = x \iff$ 对于任意$\alpha \in \mathcal{A}, \lim_\mu x_\mu(\alpha) = x(\alpha)$.

证明: 留作作业. □

推论 5.1.27. 令 $X_1, X_2 \cdots$ 为可数个度量空间, 每个 X_i 上的度量 $d_i \leqslant 1$, 定义 $S = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ 的度量为 $d(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} 2^{-i} d_i(x(i), y(i))$, 则 d 诱导的拓扑是乘积拓扑.

证明: 我们作业里证过对任意 S 中序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 有 $x_n \to x \iff$ 对于任意i有$x_n(i) \to x(i)$, 将序列换成网 $(x_\mu)_{\mu\to I}$ 则同样的等价性用同样的方法可得, 故 d 给出的拓扑是乘积拓扑. □

注记. 若定义度量为 $d(x, y) = \sup_{i\geqslant 1}\{\frac{1}{i} d_i(x(i), y(i))\}$ 则结论也成立.

5.2 连通性

连通这个概念比较特殊, 不是直接进行定义的，而是从" 不连通" 的反面定义而来.

定义 5.2.1. 拓扑空间 X 称为**不连通**的, 若存在开集 U, V, 使得 $U \cap V = \varnothing, U \cup V = X$. 称拓扑空间 X 是**连通**的, 若 X 不是不连通的.

注记. 由于开集的补集是闭集, 于是上面连通的定义等价于不存在两个闭集 U,V, 使得 $U\cap V=\varnothing, U\cup V=X$. 并且这也等价于 X 中没有既闭又开的集合, 否则它的补集也既开又闭, 它们两个满足不连通性的定义.

连通性这么奇怪的定义方式其实是因为想要保证下面的介值定理成立.

命题 5.2.2 (介值定理)**.** *对拓扑空间 X, 以下命题等价.*

(1) X 连通;

(2) 若 $f: X\to R$ 连续, 且函数值可取到正数和负数, 则函数有零点, 即存在 $x\in X$, 使得 $f(x)=0$.

证明: 若 (1) 成立, 假设 (2) 不成立, 存在$f: X\to\mathbb{R}$ 是连续的, 且 $f(X)$ 包含正数和负数, 且 $0\notin f(X)$. 令 $U=f^{-1}(0,+\infty)=f^{-1}(-\infty,0)$. 则有 $X=U\cup V$ 且 U,V 是开集, 且均不为空集, 这与 X 的连通性矛盾! 若 (2) 成立, 假设 (1) 不成立, 则 存在U,V 是非空的开集, 且 U,V 是 X 的一个分划. 令 $f: X\to\mathbb{R}$ 如下定义:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in U;\\ -1 & x\in V.\end{cases}$$

则 f 是连续的, 但不满足 (1), 矛盾! □

注记. 介值定理看上去不过是简单的概念上的互相推导, 但其实它转移了我们看问题的方向. 从函数取值的角度换成了整个空间所拥有的性质.

例子. *任意 $\mathbb{R}$ 上的区间是连通的.*

证明: 我们只来证 $(a,b)(a<b)$ 是连通的, 若否, 则 存在U,V 是 (a,b) 的分划, 且均是 (a,b) 的非空闭子集, 任取 $x_1\in U, y_1\in V$ 则不妨设 $x<y$, 构造 U 中的递增列 $\{x_n\}$,V 中的递减列 $\{y_n\}$ 满足 $x_n\leqslant y_n$ 且 $y_n-x_n=\frac{y_{n-1}-x_{n-1}}{2}$, 方法如下: 若已构造出递增序列 $x_1\leqslant\cdots\leqslant x_k\leqslant y_k\leqslant\cdots\leqslant y_1$. 若 $\frac{x_k+y_k}{2}\in U$, 则令 $x_{k+1}=\frac{x_k+y_k}{2}, y_{k+1}=y_k$, 若 $\frac{x_k+y_k}{2}\notin U$, 即 $\frac{x_k+y_k}{2}\in V$, 则令 $x_{k+1}=x_k, y_{k+1}=\frac{x_k+y_k}{2}$. 故得数列 $\{x_n\},\{y_n\}$, 且它们都收敛. 设 $x_n\to x, y_n\to y$. 则由闭区间套定理知 $x=y$, 又 U,V 是闭集,$x\in U, y\in V$, 这与 $U\cap V=\varnothing$.

例子. (a,b],[a,b),(a,b) 类似.

□

定理 5.2.3. *令 E 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集, 则 E 是连通的 $\iff$ 存在 $-\infty\leqslant a\leqslant b\leqslant+\infty$ 使 $E=[a,b](a,b\neq\infty)$ 或 $[a,b)(a\neq-\infty)$ 或 $(a,b](b\neq+\infty)$ 或 (a,b).*

证明: 由上面的例子, 我们只需要说明当 E 是连通时, 其是区间的形式. 令 $a=\inf E$,$b=\sup E$, 则 $E\subset[a,b]$, 我们只需证明 $(a,b)\subset E$. 只需对 对于任意$c\in(a,b)$, 我们来证 $c\in E$. 若 $c\notin E$, 则有

$$E=(E\cap(c,+\infty))\cup(E\cap(-\infty,c))$$

.

由于 c 不是 E 上界 $\Longrightarrow E$ 中有大于 c 的数,$E\cap(c,+\infty)\neq\varnothing$, 类似地,$E\cap(-\infty,c)\neq\varnothing$, 故 E 不连通, 矛盾! 故 $c\in E$. 从而 $(a,b)\subset E\subset[a,b]$ 从而 E 是一个区间.

□

命题 5.2.4. *令函数 $f:X\to Y$ 是连续的,X 是连通的, 则 $f(X)$(作为 Y 的拓扑子空间) 是连通的.*

证明: 把 Y 换成 $f(X)$, 使 $f:X\to Y$ 是满射, 若 Y 是不连通的, 则存在 U,V 是 $f(X)$ 的一个非空的分划 (均不为空集) 且均为开子集, 则有 $X=f^{-1}(U)\cup f^{-1}(V)$ 是 X 的一个分划且 $f^{-1}(U)$ 与 $f^{-1}(V)$ 均是开集, 这与 X 是连通的矛盾! □

附注. 以上命题在 $Y=\mathbb{R}$ 时给出了介值定理, 故此命题可作为介值定理的推广.

定义 5.2.5. X 称为**道路连通** (**path connected**) 的，若 X 中任意两点 $a,b\in X$, 我们有 存在$\gamma:[0,1]\to X$ 是连续的, 使 $\gamma(0)=a,\gamma(1)=b$. 并且称 γ 为一个**道路**.

命题 5.2.6. *若 X 是道路连通的, 则 X 是连通的.*

证明: 假设 X 是道路连通的, 但是是不连通的, 则 存在U,V 是 X 的一个分划, 且两者均是非空开子集,对于任意$a\in U,b\in V$, 存在$\gamma:[0,1]\to X$ 是连续的函数, 且 $\gamma(0)=a,\gamma(1)=b$. 则 $[0,1]=\gamma^{-1}(U)\cap\gamma^{-1}(V)$ 是不连通的. 矛盾! 故 X 是连通的. □

例子. *$\{z\in\mathbb{C}\,|\,1<|z|\leqslant 2\}$ 道路连通因此连通.*

例子. *$\mathbb{R}$与$\mathbb{R}^2$ 不同胚: 任取 $x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}^2$, 则 $\mathbb{R}\setminus\{x\}$ 不连通, 但 $\mathbb{R}^2\setminus\{y\}$*

我们来给一个连通但不道路连通的例子.

命题 5.2.7. *若 X 的子集 E 是连通的, 则 $\overline{E}$ 是连通的.*

证明: 留作作业. □

例子 (拓扑学家的正弦曲线). *$X_0\subset\mathbb{R}^2$ 定义为 $X_0=\{(x,y)|y=\sin\frac{1}{x},0<x\leqslant 1\}$, 则 $X=\overline{X_0}=(\{0\}\times[-1.1])\cup X_0$, 那么 X 是连通的, 但不是道路连通的.*

证明: 令 $f:(0,1]\to\mathbb{R}^2, f(x)=(x,\sin\frac{1}{x}). f((0,1])=X_0$, 它是连通的, 故 $X=\overline{X_0}$ 是连通的.

我们下面说明 X 不是道路连通的. 任取 $a\in(0,1]$, 我们来说明 $(0,0)$ 与 $(a,\sin\frac{1}{a})$ 是不道路连通的两个点. 若否, 假设 $\gamma:[0,1]\to X, \gamma(0)=(0,0), \gamma(1)=(a,\sin\frac{1}{a})$. 考虑函数 $\pi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},(x,y)\mapsto x$. 则 $\pi\circ\gamma$ 是连续的, 考虑 $E=\{t\in[0,1]:\pi\circ\gamma(t)=0\}=(\pi\circ\gamma)^{-1}(0)$ 是 [0,1] 的闭子集, 故 $e=\sup E\in E$, 且 $0\leqslant e<1$. 对 对于任意$n\in\mathbb{Z}_+$, 若 $e+\frac{1}{n}\leqslant 1$, 则 $\pi\circ\gamma([0,e+\frac{1}{n}])$ 是 $\mathbb{R}$ 区间. 因此, 形如 $[0,c]$或$[0,c)(c>0)$. 其中必然能找到两列点 $x_n\in\frac{1}{\pi\mathbb{Z}_+}, y_n\in\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}_+}$, 使得 $x_n\to e, y_n\to e$. 而 $\gamma(x_n)$ 纵坐标是 $0,\gamma(y_n)$ 纵坐标是 1, 这使得 $\gamma(e)$ 的纵坐标同时是 0 和 1, 不可能.

$\square$

5.3 紧性

定义 5.3.1. X 的一个**开覆盖 (open cover)** 是 2^X 的一个子集 $\mathfrak{U}$, 其元素是 X 的开子集, 且 $X=\bigcup\limits_{\Omega\in\mathfrak{U}}\Omega$. 而若 $\mathcal{V}\subset\mathfrak{U}$, 且 $X=\bigcup\limits_{\Omega\in\mathcal{V}}\Omega$, 则称 $\mathcal{V}$ 是 $\mathfrak{U}$ 的子覆盖. 对于包含 X 的一个拓扑空间 Y, 则 X 在 Y 中的开覆盖, 意为 $X\subset\bigcup\limits_{\Omega\in\mathfrak{U}}\Omega$ 且 Ω 是 Y 的开子集, 那么 $X\cap\Omega$ 在 X 的子空间拓扑下事实上也是开集, 这与先前定义相容.

定义 5.3.2. 拓扑空间 X 称为紧 (compact). 若 X 的每个开覆盖都有有限子覆盖 (用有限个开集覆盖).

附注. 若 $X\subset Y$, 则 X 是紧的 $\iff$ 每个 X 在 Y 中的开覆盖中有有限子覆盖.

例子. *$\mathbb{Z}$ 作为 R 的子空间不是紧的. 这是因为 $\mathbb{Z}$ 上的拓扑作为子空间拓扑为 $\mathfrak{U}=\{\{a\}|a\in\mathbb{Z}\}$, 且 $\mathbb{Z}=\bigcup\limits_{a\in\mathbb{Z}}\{a\}$, 而这个覆盖并没有有限覆盖.*

例子. *$\mathbb{R}$ 不是紧的, 令 $\mathfrak{U}=\{\{(a,b):a<b\}\}$, 则 $\mathfrak{U}$ 是 $\mathbb{R}$ 的开覆盖,$\mathcal{V}$ 是 $\mathfrak{U}$ 有限子覆盖, 则 $\bigcup\limits_{\Omega\in\mathcal{V}}\Omega$ 有界, 这不可能.*

例子. *类似地, $(0,+\infty)$ 也不是紧的, 进一步 $(0,1)$ 也不是紧的 (可以定义连续双射 $f:(0,+\infty)\to(0,1), x\mapsto\frac{x}{1+x}$).*

例子. *若 X 有一个诱导拓扑的度量, 且该度量 d 无上界, 则 X 不是紧的.*

证明: $X=\bigcup_{R>0}B_X(x_0,R)(x_0\in X)$, 它是没有有限子覆盖的, 否则 d 是有界度量, 矛盾!

$\square$

注记. 在运用列紧性时, 紧空间 X 经常作为 Y 的子空间出现. 例如 $[a,b]$ 作为 $\mathbb{R}$ 的子集. 此时,X 紧意味着: 若 $\mathfrak{U}$ 为 Y 中一族开子集且 $X\subset\bigcup\limits_{\Omega\in\mathfrak{U}}\Omega$, 则 $\mathfrak{U}$ 有有限子集 $\mathcal{V}$ 使得 $X\subset\bigcup\limits_{\Omega\in\mathcal{V}}\Omega$, 我们说 $\mathfrak{U}$ 是 X **在 Y 中的开覆盖**.

命题 5.3.3. *$X \subset Y$,Y 是 Hausdorff 空间, 且 X 是紧的, 则 X 是 Y 的闭子集.*

证明: 取任意 $y \in Y \setminus X$, 我们来证 y 是 $Y \setminus X$ 的内点. 由 Hausdoff 性 对 对于任意$x \in X, x \neq y$, 存在开领域 $U_x \ni x, V_x \ni y$ 且 $U_x \cap V_x = \varnothing$. 设 $\mathfrak{U} = \{U_x : x \in X\}$ 是 X 的一族开覆盖. 由 X 紧, 存在有限子覆盖, 即存在 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 使得 $U_{x_1}, U_{x_2} \cdots U_{x_n}$ 覆盖 X. 令 $V = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_{x_i}$, 则 V 是 y 的开邻域且与 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i} \supset X$ 不相交, 故 y 在 $Y \setminus X$ 内. □

附注. 由此也得出 (0,1) 不可能是紧空间.

反之, 我们有:

命题 5.3.4. *若 Y 是紧的拓扑空间,X 是 Y 的闭子集, 则 X 是紧的.*

证明: 令 $\mathfrak{U}$ 是 X 在 Y 中的一族开覆盖, 则由于 X 是闭集, 故 $Y \backslash X$ 是开集, 故 $\mathfrak{U} \cup \{Y \backslash X\}$ 是 Y 的开覆盖, 因为 Y 是紧的, 故可设 $Y = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n \cup (Y \setminus X)(U_i \in \mathfrak{U})$, 则我们有 $X \subset U_1 \cup U_2 \cup \cdots U_n$, 于是 X 是紧的. □

附注. 以上两命题中, 假设 Y 是度量空间, 且把紧换成列紧, 则易证结论也成立.

我们接下来的一个主要目标是证明对于任意 (可) 度量空间, 紧性与列紧性等价. 而这两个性质, 从直观上看, 可以说是几乎没有任何联系. 而它们在 (可) 度量空间下等价, 这是因它们与另外一个性质同时等价. 由此, 我们引入一个中间概念: 可数紧.

定义 5.3.5. X 称为**可数紧 (Countably compact)** 的, 若 X 的任意可数开覆盖有有限子覆盖.

命题 5.3.6. *令 X 是拓扑空间, 则以下命题是等价的:*

(1) X 是可数紧的;

(2) 若 $U_1 \subset U_2 \subset \cdots$ 为 X 中一列递增的开子集, 且 $X = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} U_n$, 则 存在$n \in \mathbb{Z}_+$使得 $X = U_n$;

(3) 若 $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ 是 X 中一列递减闭子集且 $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} E_n = \varnothing$, 则 存在$n \in \mathbb{Z}_+$, 使 $U_n = \varnothing$;

(4) 若 $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ 为 X 中一列递减的非空闭子集, 则 $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} E_n \neq \varnothing$.

附注. (3) 和 (4) 被称为闭集套定理, 它们是闭区间套定理的直接推广.

证明: 显然,(2)(3)(4) 只是将开集变为闭集, 空集变为非空, 自然是等价的, 而 (2) 是 (1) 的一种特殊情况, 自然也是成立的, 于是我们只需证 (2)$\Rightarrow$ (1).
假设 (2) 成立, 令 $\{V_1, V_2 \cdots\}$ 为 X 的可数开覆盖. 令 $U_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i$, 由 (2), 存在 n 使得 $X = U_n$. 故 (1) 成立. □

附注. 若把 (1) 中的可数紧换成紧, 把 (2)(3)(4) 中的递增/递减子集列换成递增/递减网, 则 (1)(2)(3)(4) 也等价, 证明留作作业.

例子. 令 X 为可数紧度量空间. 假设 $f_n : X \to [0,\infty), f_1 \leqslant f_2 \cdots$. 假设任意 n,$Z(f_n)\{x \in X : f_n(x) = 0\}$ 非空, 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z(f_n) \neq \varnothing$, 令 $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, 则由上述推理知 f 有零点.

附注. 这里的 $Z(f_n)$ 其实是 Zaraski 拓扑中的闭集. 另外, 我们一般说的紧性都要加上 Hausdoff 条件. 而不满足 Hausdoff 条件的紧集, 如上述提到的 Zaraski 拓扑, 我们称之为**拟紧 (quasi compact)**.

定理 5.3.7. X 是度量空间, 则 X 是可数紧的等价于它是列紧的.

附注. 类似地, 若 X 为拓扑空间, 则 X 紧等价与 X 中任意网都有收敛子网.

证明: 若 X 是可数紧的, 则取点列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \subset X$,$E_n = \{x_m | m \geqslant n\}$, 则由有向集的定义知 E_n 不是空集, 并且 $\overline{E_1} \supset \overline{E_2} \supset \cdots$. 由 X 是可数紧的, 由上面的命题, 我们有 $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \overline{E_n}$ 非空, 取其中一个元素 x. 下面我们来归纳构造子列 $\{x_{n_k} \to x\}$. 令 $n_1 = 1$, 假设已取好 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, 因为 $x \in \overline{E_{n_k+1}}$,$B_X(x, \frac{1}{k+1})$故有$\bigcap E_{n_k+1} \neq \varnothing$. 那么我们取其中一个元素 $x_{n_{k+1}} (n_{k+1} \geqslant n_k{+}1)$, 有它满足 $d(x, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{k+1}$. 于是我们有 $\lim\limits_{k\to+\infty} d(x, x_{n_k}) = 0$. 下面我们假设 X 是列紧的, 令 $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ 为 X 中非空递减闭子集列. 对 对于任意$n \in \mathbb{Z}_+$, 取 $x_n \in E_n$.$\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k k\in\mathbb{Z}_+}\}$ 收敛到 $x \in X$, 对任意 $m \in \mathbb{Z}_+$, 若 $k \geqslant m$, 则 $n_k \geqslant k \geqslant m$, 故 $x_{n_K} \in E_{n_k} \subset E_m$, 对任意 $k \geqslant m$ 成立. 因 $x_{n_k} \to x$, 且因 E_m 是闭集, $x \in E_n$. 故有 $x \in \bigcap_{m=1} \infty E_m$. □

定义 5.3.8. 拓扑空间 X 称为 **Lindelöf** 空间, 若 X 的每个开覆盖有可数个子覆盖.

定义 5.3.9. 拓扑空间 X 中子集 E 称为在 X 中**稠密**, 若 $\overline{E} = X$, 等价地,E 和 X 的每个非空开集相交, 若 X 是度量空间, 则等价于 X 中每个 $x \in X$, 存在 E 中点列收敛于 x.

定义 5.3.10. X 称为**可分的** (**seprate**), 若 X 有可数稠密的子集.

例子. $\mathbb{R}, \mathbb{R}^N, \mathbb{C}^N$ 是可分的.

定义 5.3.11. X 称为**第二可数** (**second coutable**) 的, 若 X 的拓扑有一个可数的拓扑基.

命题 5.3.12. 若 X 是度量空间, 则 X 第二可数 $\iff$ X 是可分的.

证明: 若 X 是第二可数的, 令 $\mathcal{B}$ 是可数的拓扑基, 设为 $\mathcal{B}=\{U_1,U_2,\cdots,U_n,\cdots\}$, 且可以将所有为空集的项去除，则有 对于任意$n, U_n\neq\varnothing$.
任取 $x_n\in U_n$, 则我们有 $E=\{x_1,x_2,\cdots\}$ 在 X 中是稠密的. 这是因为对 对于任意$x\in X$,对于任意x 的邻域 V, 由于 $\mathcal{B}$ 是拓扑基, 于是存在 x 使得 $x\in U_n\subset V$, 那么 $x_n\in V\cap U\neq\varnothing$.
若 X 是可分的, 则令 $E=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$ 是 X 的一个可数稠密子集.
令 $\mathcal{B}=\{B_X(x_n,\frac{1}{m})|m,n\in\mathbb{Z}_+\}$, 那么我们断言 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个拓扑基. 因为对 对于任意$x\in X$ 和邻域 V, 我们可以取 $r>0$ 使得 $U=B_X(x,r)\subset V$, 再取 $m\in\mathbb{Z}_+$ 足够大使 $\frac{1}{m}<\frac{r}{2}$, 由于 $B(x,\frac{1}{m})$ 与 E 是相交的, 故而可以取 $E\cap B(x,\frac{1}{m})$ 中的一个元素 x_n, 那么 $d(x_n,x)<\frac{1}{m}$, 于是我们有 $x\in B_X(x_n,\frac{1}{m})\subset B_X(x,r)=U$. □

命题 5.3.13. *令 X 为第二可数拓扑空间,E 为 X 的拓扑子空间, 则 E 是第二可数的.*

证明: 取 X 的可数拓扑基 $\mathcal{B}_X$, 令 $\mathcal{B}_E=\{U\cap E|U\in\mathcal{B}_x\}$, 则容易证明其是 E 子拓扑空间上的一个可数拓扑基. □

命题 5.3.14. *令 X 为第二可数的拓扑空间, 则 X 是 Lindelöf 空间.*

证明: 令 $\mathcal{B}$ 是 X 的一族可数拓扑基, 令 $\mathfrak{U}$ 是 X 的开覆盖, 即 $X=\bigcup\limits_{U\in\mathfrak{U}}U$. 令 $\mathcal{B}_1=\{\Omega\in\mathfrak{U}|存在U\in\mathfrak{U}使\Omega\subset U\}$, 则 $\mathcal{B}_1$ 是一个可数开覆盖, 证明如下:
对于任意$x\in X$,存在$U\in\mathfrak{U}$ 使 $x\in U$, 由于 $\mathcal{B}$ 是拓扑基,存在$\Omega\in\mathcal{B}$, 使 $x\in\Omega\subset U$, 故 $\Omega\in\mathcal{B}_1$, 故 $X=\bigcup\limits_{\Omega\in\mathcal{B}_1}$.对于任意$n$, 取 U_n 满足 $\Omega_n\subset U_n$, 则 $\{U_1,U_2,\cdots\}$ 是 $\mathfrak{U}$ 的可数子覆盖. □

定理 5.3.15 (Heine-Borel)**.** *令 $X\subset\mathbb{R}^n$, 则以下命题是等价的:*

(1) X 是紧集;

(2) X 是列紧的;

(3) X 是 $\mathbb{R}^n$ 的有界闭子集.

证明: (1)$\Longrightarrow$(2) 因为紧性可以推出紧可数紧, 而 $\mathbb{R}^n$ 上列紧与可数紧等价.
(2)$\Longrightarrow$(1) $\mathcal{R}^n$ 是可分的, 故而 X 是可分的, 故 X 是 Lindelöf 空间, 故而 X 是紧的.
(1)$\Longrightarrow$ (3) 由 X 是紧的, 故 X 是闭集 (任意列有收敛子列, 而这是一个 Hausdorff 空间). $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}_+}B(0,m)$ 是 X 在 $\mathbb{R}^n$ 中的递增开覆盖, 故存在 m, 使 $X\subset B(0,m)$, 故而 X 是有界的.
(3)$\Longrightarrow$ (1),X 是 $[-N,N]\times\cdots\times[-N,N]$ 有界闭集, 而后者是列紧的 (Bolzano-weierstrass) 因而紧. 而紧子集的闭子集依然紧, 故 X 紧. □

定理 5.3.16. 令 X 为度量空间，则 X 紧 $\iff$ X 列紧.

证明: X 是紧的 $\Longrightarrow X$ 是可数紧的 $\iff$ X 是列紧的.
而若 X 是列紧的, 如果 X 是 Lindelöf 的, 则 X 是紧的. 下面我们来证明列紧的度量空间可分, 因此就有了 Lindelöf. □

定理 5.3.17. 任意列紧度量空间 X 可分.

证明: 对任意 $n \in \mathbb{Z}_+$ 构造 $a_1, a_2 \cdots \in X$ 如下. 假设 $a_1, a_2 \cdots a_n$ 已取好. 考虑 X 中元素 a_{k+1}(若存在)，其与 $a_1, a_2 \cdots a_k$ 距离都大于等于 $\frac{1}{n}$. 这一过程必然在有限步内终止, 否则有 $a_{k k \in \mathbb{Z}_+}$ 两两距离大于等于 $\frac{1}{n}$, 故无收敛子列, 这不可能.
令 E_n $\{a_1, a_2 \cdots\}$ 为构造出的有限子集. 则 X 中任意一点与某个 a_i 距离小于 $frac1n$, 于是对于任意 $x \in X$, 有 $\rho_{E_n}(x) = d(x, E_n) < \frac{1}{n}$. 考虑 $E = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n$ 为可数集. 此时我们有 $d(x, E) \leqslant d(x, E_n) < \frac{1}{n}$ 对任意 $n \in \mathbb{Z}_+$ 成立. 于是 $d(x, E) = 0$, 这等价于 $x \in \overline{E}$, 故 E 在 X 内稠密. □

命题 5.3.18. 若 X, Y 是拓扑空间,$f: X \to Y$ 是连续的, 若 X 是紧的, 则 $f(X)$ 也是紧的.

证明: 若 $\mathfrak{U}$ 是开覆盖, 则 $\{f^{-1}(U) : U \in \mathfrak{U}\}$ 是 X 的一个开覆盖, 取有限子覆盖 $\{f^{-1}(U_1) \cdots f^{-1}(U_n)\}$, 则 $\{U_1, U_2 \cdots U_n\}$ 是 $f(X)$ 的一个有限开覆盖. 即 $f(X)$ 是紧集. □

命题 5.3.19. 令 X 为紧拓扑空间,$f: X \to \mathbb{R}$ 连续, 则 $f(X)$ 有界, 且 $\sup f(X), \inf f(X) \in f(X)$.

命题 5.3.20. 令 X, Y 为 Hausdorff 空间, 且 X 是紧的,$f: X \to Y$ 是连续的, 则 f 是**闭映射**, 即 f 把 X 的闭子集映到 Y 的闭子集. 特别地, 若 f 是双射, 则 f 是同胚的.

证明: 若 $E \subset X$ 是闭子集,E 紧的,$f(E)$ 是紧的, 又 Y 是 Hausdorff 空间, 故在 Y 中是闭集. □

命题 5.3.21. 令 X 是 $\mathbb{R}$ 上的区间, 若 $f: X \to \mathbb{R}$ 是严格递增或严格递减的连续函数, 则 $f: I \to f(I)$ 是同胚.

证明: 我们不妨设 f 是严格递增的, 若 $I = (a, b), -\infty \leqslant a < c < b \leqslant +\infty$, 对于任意$c \in I = (a, b)$, 取 a', b' 满足 $a < a' < c < b' < b$. 则由于 $[a', b']$ 是 $\mathbb{R}$ 的有界闭集因此是紧集, 故 $f: [a', b'] \to f([a', b'])$ 是同胚, 且 $f([a', b']) = [f(a'), f(b')]$, 故 $f^{-1}: [f(a', b')] \to [a', b']$ 是连续的, 故 $f^{-1}: (f(a'), f(b'))$ 是连续的, 且 $f(c) \in (f(a'), f(b'))$, 故 $f^{-1}: f(I) \to I$, 在 $f(c)$ 处是连续的, 于是 f^{-1} 是连续的. 对 $(a, b], [a, b)$ 只需证 f^{-1} 在 $f(b)$ 处连续. 取 $a < a' < b$. 则由 $f: [a', b] = [f(a'), f(b)]$ 是同胚易知 f^{-1} 也在 $f(b)$ 处连续. 故处处连续.$[a, b)$ 类似,$[a, b]$ 直接由紧性导出. □

例子. 任意 $n \in \mathbb{Z}_+$, 令 $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty), f(x) = x^n$. 则 f 连续且严格递增, 易知 $f[0, +\infty)$ 上下确界为 $+\infty$ 和 0. 因 $f[0, +\infty)$ 连通, 于是它必须是区间, 故为 $[0, \infty)$. 于是 f 是满射. 因此是同胚. 其逆映射 $f^{-1}(y)$ 记为 $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{n}}$.

第六章　度量空间的完备化

6.1　一致连续

设 X 是 $\widetilde{X}$ 的稠密子集,$f : X \to Y$ 是连续函数, 那么至多存在一个连续的 $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to Y$ 使 $\widetilde{f}|_X = f$. 当然, 这样的 $\widetilde{f}$ 并不总是存在.

例子. 考虑

$$f : \begin{matrix} (0,1) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin\frac{1}{x} \end{matrix},$$

则它不可以被延拓到 $[0,1)$ 上.

我们的问题是, 对于怎样的 f, 这样的 $\widetilde{f}$ 存在? 为解决这个问题, 我们不妨引出一致连续的概念.

注记. 唯一性的证明: 若 $\widetilde{f}|_X = f$, 则 对于任意$p \in \widetilde{X}$, 存在 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \subset X$,$x_n \to x$, 则由连续性,$\widetilde{f}(p) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$. 换言之: 连续函数由它任一稠密子集上的取值决定.

注记. 记 $C(X,Y) = \{$连续函数$f : X \to Y\}$

定义 6.1.1. $f : X \to Y$ 称为**一致连续**的, 若任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $x, x' \in X$, 若 $d(x,x') < \delta$, 则 $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$. 我们还可以用网的语言来描述: 定义 $I = X \times X$, 其中 $(x_1, x_1') \lesssim (x_2, x_2') \iff d(x_1, x_1') \leqslant d(x_2, x_2')$, 于是 f 一致连续 $\iff \lim\limits_{(x,x')\in I} d(f(x), f(x')) = 0$.

命题 6.1.2. $f : X \to Y$, 则以下命题等价:

(1) f 一致连续;

(2) 对于任意$X \times X$ 中的网 $\{(x_\alpha, x_\alpha')\}_{\alpha\in J}$, 若 $\lim\limits_{\alpha} d(x_\alpha, x_\alpha') = 0$, 则 $\lim\limits_{\alpha} d(f(x_\alpha), f(x_\alpha')) = 0$;

(3) 对于任意$X \times X$ 中的点列 $\{(x_n, x_n')\}$, 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x_n') = 0$, 则 $d(f(x_n), f(x_n')) = 0$.

证明: (1) $\Longrightarrow$ (2). 令 f 一致连续. 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对任意 $d(u,v) < \delta, (u,v) \in X^2$ 由 $d(f(u), f(v)) < \varepsilon$. 若 $\lim\limits_{\alpha} d(x_\alpha, x_\alpha') = 0$, 则存在 $\beta \in J$, 若 $\alpha \geqslant \beta$, 则

$d(x_\alpha, x'_\alpha) < \delta$, 故 $d(f(x_\alpha, f_{x'_\alpha})) < \varepsilon$. 故 $d(f(x_\alpha), f(x'_\alpha)) \to 0$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) 取点列为一个网即可. (3) $\Longrightarrow$ (1), 我们来证明其逆否命题. 若 (1) 不成立, 存在 $\varepsilon > 0$, 对任意 $\delta > 0$, 存在 $x, x' \in X$, 有 $d(x, x') < \delta$ 且 $d(f(x), f(x')) \geqslant \varepsilon$. 对任意 $n \in \mathbb{Z}_+$, 取 $x_n, x'_n \in X$ 满足 $d(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}$. 且 $d(f(x_n), f(x'_n)) \geqslant \varepsilon$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x'_n) = 0$, 但 $\lim\limits_{n\to+\infty} d(f(x_n), f(x'_n)) \nrightarrow 0$. □

推论 6.1.3. *若 $f: X \to Y$ 一致连续, 则 f 把 X 中柯西网映射到 Y 中的柯西网.*

证明: 令 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 X 中的柯西网, $\lim\limits_{(\alpha,\beta)\in I^2} d(x_\alpha, x_\beta) = 0$, 则 $\lim\limits_{(\alpha,\beta)\in I^2} d(f(x_\alpha), f(x_\beta)) = 0$, 故而 $\{f(x_\alpha)\}$ 是 Y 中的柯西网. □

定理 6.1.4. *令 $f \in C(X, Y), X$ 是 $\widetilde{X}$ 的稠密子集, 考虑*

(1) f 是一致连续的;

(2) 存在唯一的 $\widetilde{f} \in C(\widetilde{X}, Y)$, 满足 $\widetilde{f}|_X = f$.

(a) 若 Y 完备, 则 (1) $\Longrightarrow$ (2) 且 (1) $\Longrightarrow$ $\widetilde{f}$ 一致连续;

(b) 若 $\widetilde{X}$ 是紧的, 则 (2) $\Longrightarrow$ (1).

证明: 我们先来证 (a):

对任意 $p \in \widetilde{X}$, 存在$\{x_n\} \subset X, x_n \to p$, 因为 f 一致连续, 则 $\{f(x_n)\}$ 是 Y 中的柯西列, 又 Y 是完备的, 故其极限存在, 记为 $q \in Y$. 令 $\widetilde{f}(p) = q$. 下面我们来证明 q 是良定义的, 即 $f(x)$ 与 $\{x_n\}$ 的选取是无关的, 也就是对于任意 $\{x'_n\} \subset X, x'_n \to P$, 令 $f(x'_n) \to q' \in Y$, 我们有 $q' = q$. 这是因为距离函数是连续的, 于是 $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x'_n) = d(p, p) = 0$, 故 $\lim\limits_{n\to+\infty} d(f(x_n), f(x'_n)) = 0$, 从而 $q = q'$. 故而 $\widetilde{f}: \widetilde{X} \to Y, \widetilde{f}(p) = q$ 是良定义的, 且 $\widetilde{f}|_X = f$.

下面我们来证 $\widetilde{f}$ 一致连续, 任取两个数列 $\{p_n\}, \{p'_n\} \subset \widetilde{X}$, 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} d(p_n, p'_n) = 0$, 由一致连续的序列的等价条件, 只需证 $\lim\limits_{n\to+\infty} d(\widetilde{f}(p_n), \widetilde{f}(p'_n)) = 0$. 对任意 $n \in \mathbb{Z}_+, X$ 中有点列收敛于 p_n. 又因为其在 f 中的像收敛于 $\widetilde{f}(p_n)$, 故存在$x_n \in X$, 使 $d(x_n, p_n) < \frac{1}{n}$ 且 $d(f(x_n), \widetilde{f}(p_n)) < \frac{1}{n}$. 类似地, 存在 $x'_n \in X, d(f(x'_n), \widetilde{f}(p'_n)) < \frac{1}{n}$. 于是 $0 \leqslant d(x_n, x'_n) \leqslant d(x_n, p_n) + d(p_n, p'_n) + d(x'_n, p'_n) \leqslant \frac{2}{n} + d(p_n, p'_n)$, 由 Squeeze lemma, $d(x_n, x'_n) \to 0$ 又因为 f 一致连续, 于是 $d(f(x_n), f(x'_n)) \to 0$,$d(\widetilde{f}(p_n), \widetilde{f}(p'_n)) \leqslant d(\widetilde{f}(p_n), f(x_n)) + d(f(x_n), f(x'_n)) + d(\widetilde{f}(p_n), f(x'_n)) \leqslant \frac{2}{n} + d(f(x_n), f(x'_n))$, 故而 $d(\widetilde{f}(p_n), \widetilde{x'_n}) \to 0$, 故 $\widetilde{f}$ 一致连续.

下证 (b), 我们只需来证 f 是一致连续的:

因为 f 是连续的, 故而若固定 $\varepsilon > 0$, 对任意$p \in X$, 存在$\delta_p > 0$ 使得对任意 $q \in X$,$d(p, q) < \delta_p \Longrightarrow d(f(p), f(q)) < \varepsilon$. 那么 $\mathcal{U} = \{B(p, \frac{1}{2}\delta_p) | p \in X\}$ 是 X 的开覆盖,

注意到 X 是紧的, 故而这个开覆盖有有限的子覆盖, 设为 $\mathcal{V}=\{B(p_i,\frac{1}{2}\delta_{p_i})|1\leqslant i\leqslant n\}$. 令 $\delta=\dfrac{1}{2}\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\delta_{p_i}\}$. 则对任意的 $x,x'\in X$,$d(x,x')<\delta$, 由于 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}B(p_i,\frac{1}{2}\delta_{p_i})$, 故存在 i 使 $d(p,x_i)<\delta_{p_i}$, 从而 $d(x',p_i)\leqslant d(x,x')+d(x,p_i)\leqslant\delta+\frac{1}{2}\delta_{p_i}<\delta_{p_i}$, 因而 $x,x'\in B(p_i,\delta_{p_i})$, 进一步有 $d(f(x),f(x'))<d(f(x),f(p_i))+d(f(p_i),f(x'))<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$, 从而 $\widetilde{f}$ 是一致连续的, 那么 $f=\widetilde{f}|_X$ 也是一致连续的. □

附注. 定理的第二部分实则上是著名的**康托 (Cantor)** 定理.

例子. $f:(0,1]\to\mathbb{R},x\to\sin\frac{1}{x}$ 不一致连续, 因为它无法延拓到连续函数 $\widetilde{f}:[0,1]\to\mathbb{R}$. 例如将 $\mathbb{Q}$ 扩充成 $\mathbb{R}$.

下面来谈论完备化. 对任意度量空间 X, 我们希望把 X 扩充成一个大的完备度量空间 $\hat{X}$, 使得 X 在 $\hat{X}$ 中稠密, 且度量 $d_{\hat{X}}$ 限制在 X 上是 d_X.

6.2 完备化

定义 6.2.1. X 的一个**完备化**指一个等距映射 $l:x\to\hat{x}$, 其中 $\hat{X}$ 是一个完备的度量空间, 且 $l(X)$ 在 $\hat{X}$ 中是稠密的.

其中等距映射如下定义:

定义 6.2.2. $f:X\to Y$ 称为**等距映射** (**isometry**), 若 对于任意$x,x'\in X$, 有 $d(x,x')=d(f(x),f(x'))$, 可见等距映射一定是单射, 若其还是满射, 则称为**等距同构** (**isometric isomorphism**).

用这种方式定义完备化是因为完备化不一定唯一, 但在同构意义下唯一.

定义 6.2.3. 任意度量空间 X 中有一个完备化 $l:X\to\hat{X}$.

证明: 令 Z 为 X 中的所有柯西列构成的集合,$\hat{X}=Z/\sim$, 其中 $\sim$ 是一个等价关系,$\{x_n\}\sim\{x'_n\}\iff\lim\limits_{n\to+\infty}d(x_n,x'_n)=0$. 令 $d_Z:Z\times Z\to\mathbb{R}$,$d_z(\{x_n\},\{x'_n\})=\lim\limits_{n\to+\infty}d_X(x_n,x'_n)$. 因为 对于任意$n,m\in\mathbb{Z}_+$, 有 $|d(x_m,x'_m)-d(x_n,x'_n)|\leqslant d(x_m,x_n)+d(x'_m,x'_n)\to 0)$. 于是 $\{d(x_n,x'_n)\}$ 是柯西列
以下我们验证 d_Z 是一个 $\hat{X}=Z/\sim$ 上的度量:
由极限的性质知,d_X 满足三角不等式, 故而 $d_Z(\{x_n\},\{x''_n\})=\lim\limits_{n\to+\infty}(d_X(x_n,x'_n)+d_X(x'_n,x''_n))\leqslant\lim\limits_{n\to+\infty}d_X(x_n,x'_n)+\lim\limits_{n\to+\infty}d_X(x'_n,x''_n)\leqslant d_Z(\{x_n\},\{x'_n\})+d_Z(\{x'_n\},\{x''_n\}))$, 从而 d_Z 满足三角不等式. 而若 $d_Z(\{x_n\},\{x'_n\})=0$, 有 $\lim_{n\to+\infty}d_X(x_n,x'_n)=0$, 于是 $\{x_n\}\sim\{x'_n\}$, 故 d_Z 满足正定性. 由上便有 d_Z 是一个 $\hat{X}$ 上的度量.
容易验证 $\iota:X\to\hat{X},x\mapsto\{x,x,x\cdots\}$ 是一个等距映射, 且 $\iota(X)$ 在 $\hat{X}$ 中是稠密的. 于是我们只需证 $\hat{X}$ 是完备的, 只需证明如下引理: □

引理 6.2.4. *令 X 是度量空间 $\widetilde{X}$ 的稠密子空间. 若 X 中柯西列都收敛到 $\widetilde{X}$ 中元素, 则 X 完备.(例:$X=\mathbb{Q},\widetilde{X}=\mathbb{R}$). 故 $\widetilde{X}$ 是 X 的一个完备化.*

证明: 令 $\{p_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 为 $\widetilde{X}$ 柯西列. 对任意 n, 存在 $x_n\in X$, 使得 $d(x_n,p_n)<\frac{1}{n}$. 则由 $d(x_m,p_n)\leqslant\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+d(p_m.p_n)\to 0$. 于是 $\{x_n\}$ 是 X 中柯西列, 故 $x_n\to x\in\widetilde{X}$. 且 $\{p_n\}$ 与 $\{x_n\}$ 是等价的柯西列, 故 $p_n\to x$. □

命题 6.2.5. *$X\subset Y$, 对于以下命题:*

(1) X 是完备的;

(2) X 是 Y 的闭子集.

我们有 (1) $\longrightarrow$ (2), 而若 Y 是完备的, 则有 (2) $\longrightarrow$ (1).

附注. 回忆关于Hausdorff空间的子集的闭性和紧性也有类似的结果.

证明: (1)$\Longrightarrow$ (2): 若 $y\in\overline{X}$, 存在 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}\subset X$, 满足 $x_n\to y$. 因为 X 完备且因为 X 是度量空间, 于是 $\{x_n\}$ 是柯西列, 故 $\{x_n\}$ 收敛到 $x\in X$, 故 $y=x\in X$. 故 X 是闭集.
(2)$\Longrightarrow$(1): 由于 Y 的完备性,X 中关于任意Cauchy列 $\{x_n\}$ 收敛到 $y\in Y$, 又因为 $X=\overline{X}$, 因此 $y\in X$. □

推论 6.2.6. *若 Y 是完备的,$X\subset Y$,$X\hookrightarrow\overline{X}$(嵌入) 是 X 的一个完备化*

证明: 因 Y 完备, 故 $\overline{X}$ 完备, 而 X 在 $\overline{X}$ 稠密. □

例子. $\mathbb{C}$ 是完备的, 则 $\{z\in\mathbb{C}||z|\leqslant 1\}$ 是 $\{z\in\mathbb{C}||z|<1\}$ 的一个完备化.

定理 6.2.7. *若 $\iota_1:X\to\hat{X}_1,\iota_2:X\to\hat{X}_2$ 是 X 的两个完备化, 即存在等距同构 $\Phi:\hat{X}_1\to\hat{X}_2$, 使得 $\iota_2=\Phi\circ\iota_1,\iota_2=\Phi^{-1}\circ\Phi$.*

证明: 令 $\Phi=l_2\circ\iota_1^{-1}$, $\iota_1(X)\to l_2(x)$, 其是一个等距同构, 特别地, 其一致连续, 可以把它唯一地延拓到 $\hat{X}_1\to\hat{X}_2$, 并且 $\Phi:\hat{X}_1\to\hat{X}_2$ 是也是一致连续的, 且容易验证这一个 Φ 是等距映射, 于是 Φ 是单射. 于是我们只需再证 Φ 是满射, 由 $\hat{X}_1$ 是完备的, 故 $\Phi(\hat{X}_1)$ 是完备的, 于是 $\Phi(\hat{X}_1)$ 是包含 $\Phi(\iota_1(X))=\iota_2(X)$ 的一个闭集, 而其在 $\hat{X}_2$ 中, 后者是 $\iota_2(X)$ 的闭包亦即包含 $\iota_2(X)$ 的最小闭集, 只能 $\Phi(\hat{X}_1)=\hat{X}$, 故而 Φ 是满射,Φ 是等距同构. □

到此, 我们可以断言, 对任意度量空间, 它的所有完备化空间在等距同构意义下是唯一地, 对于任意的赋范线性空间, 在某些情况下我们也可以通过完备化在对应的 Banach 空间下工作.

定义 6.2.8. 令 X,Y 是赋范线性空间,$\Phi:X\to Y$ 为线性映射，我们说 Φ 有界，若存在 $c\geqslant 0$, 使得对于任意 $x\in X$. 有 $\|\Phi(x)\|\leqslant c\cdot\|x\|$ 故 $\|\Phi(x_1)-\Phi(x_2)\|=\|\Phi(x_1-x_2)\|\leqslant c\|x_1-x_2\|$. 于是若 $\|x_1-x_2\|<\frac{\varepsilon}{c}\Longrightarrow\|\Phi(x_1)-\Phi(x_2)\|<\varepsilon$.

附注. 赋范线性空间中, 有界 $\iff$ 连续 $\iff$ 一致连续 $\iff$ 在任意点连续.

故若 Φ 有界, 且 Y 是 Banach 空间, 则 $\Phi: X \to Y$, 可唯一地延拓成有界线性映射 $\Phi: \widetilde{X} \to Y$, 且 存在$C > 0$, 使得任意 $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ 有 $\|\Phi(\widetilde{x})\| \leqslant C\|\widetilde{x}\|$.

定义 6.2.9. 令 V 为 Banach 空间,X 是集合,$U = \{f \in V^x, f$仅在X的某个有限子集上取值不为 $0\}$.

U 在 $l^1(X,V)$ 中是稠密的,对于任意$g \in l^1(X,V)$,对于任意$\varepsilon > 0$,存在$f \in U$, 使 $\|f-g\|_{l^1} = \sum\limits_{x\in X} \|f(x)-g(x)\| < \varepsilon$, 因为 $l^1(X,V)$ 完备, 故其是 U 的完备化. 线性映射 $l^1(X,V) \to V, g \to \sum\limits_{x\in X} g(x).\|g(x)\| \leqslant \|g\|_{l^1}$

例子. 令 $C([0,1],\mathbb{C}) = C([0,1])$ 为连续函数 $[0,1] \to \mathbb{C}$，$C([0,1])$ 上有 L^1 范数 $\|f\|_{l^!} = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx$.

$C[0,1]$ 的完备化是 $L^1([0,1],\mu) = \{f : [0,1] \to \mathbb{C}\}$ 为 Lebesgue 可积函数,$\displaystyle\int_0^1 |f|d\mu < +\infty\}$

$K = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} : \int_0^1 |f|d\mu = 0\}$ $\int_0^1 : C([0,1]) \to \mathbb{C}, f \mapsto \int_0^1 f$ 被延拓成 $L^1([0,1],\mu) \to \mathbb{C}$.

附注. Lebesgue 积分比黎曼积分更优势的地方在于其是黎曼积分的完备化, 在很多求积分，积分与极限换序的问题里都比黎曼积分更为方便. 并且由于 Lebesgue 积分完备，因此在考虑线性空间里的分析问题时，可以在分析的意义下换基 (规范正交系)，而黎曼积分却不行，这导致 Lebesgue 积分在泛函分析里更加有用.

V 是 Banach 空间,$C(X,Y) = \{f : V \to Y, f$是连续映射$\}$.

第七章　函数

定义 7.0.1. 若 Y 为度量空间,X 为拓扑空间,$\{f_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是 $Y^\times$ 中的网,$f\in Y^\times$, 称 $\{f_\alpha\}$ 一致收敛到 f,

若对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\beta\in I$, 对任意 $\alpha\geqslant\beta$, 有 $\sup\limits_{x\in X} d(f_\alpha,f(x))<\varepsilon$,$Y=V$,$f_\alpha\to f \iff \lim\limits_{\alpha}\|f_\alpha-f\|_\infty=\lim\limits_{\alpha}\sup\limits_{x\in X}\|f_\alpha(x)-f(x)\|=0$.$\|\cdot\|$ 在 $l^\infty(X,V)$ 下是一个范数.

一般地在 Y^X中,$d(g,h)=\sup\limits_{x\in X}\delta_Y(g(x),h(x))$,$\delta_Y$ 与 d_Y 有如下关系 : $\delta_Y(y_1,y_2)=\min\{d_Y(y_1,y_2),1\}$, 而 $d(g,h)=\min\{\sup\limits_{x\in X}d(g(x),h(x)),1\}$.

例子. $f_n(x)=\frac{1}{n}\sin(nx)$, 在 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n\to\ 0$

例子. $f_n(x)=x^n, x\in[0,1]$.

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{若} 0\leqslant x<1;\\ 1, \text{若} x=1;\end{cases}$$

则 f_n 逐点收敛于 f, 但不一致收敛于 f.

例子. 令 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 考虑 $\{f_t\}_{t\in\mathbb{R}}:(t_1\lesssim t_2 \iff |t_2|\leqslant|t_1|)$,$f_t:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_t(x)=f(x-t)$, 若$\{f_t\}$ 一致收敛到 f, 则 f 一致连续.

证明: $\lim\limits_{t\to 0}\|f_t-f\|_\infty=0 \iff$. 对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\varepsilon>0$, 对任意 $|t|<\delta$, 对任意 $x\in\mathbb{R}$ 有 $|f(x-t)-f(x)|<\varepsilon$, $\overset{\text{将}x_t\text{换成于}y}{\overbrace{\iff}}$) 任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$, 对任意 $x,y\in\mathbb{R}$, 若 $|x-y|<\delta$, 则 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ □

定理 7.0.2. 若 I,J 是有向集,$\{f_{\alpha\mu}\}_{(\alpha,\mu)\in I\times J}$ 是完备度量空间 Y 中的网. 若存在 Y 中的网 $\{L_\alpha\}_{\alpha\in I}$,$\{R_\mu\}_{\mu\in J}$ 满足:

1. $\lim\limits_{\alpha\in I}\sup\limits_{\mu\in J}d(f_{\alpha\mu},R_\mu)=0$;
2. 对于任意α, $\lim\limits_{\mu\in J}f_{\alpha\mu}=L_\alpha$;

则以下极限存在且相等, $\lim\limits_{(\alpha,\mu)\in I\times J}f_{\alpha\mu}=\lim\limits_{\alpha\in I}L_\alpha=\lim\limits_{\mu\in J}R_\mu$

注记. 之前的讲义里介绍了Fubini定理，以及极限交换定理，但那些都是在假定双指标网绝对收敛的前提下进行的, 而若是想要知道双指标网极限是否存在，需要一致收敛性的判断.

证明: 只要证明 $\lim\limits_{\alpha,\mu} f_{\alpha,\mu}$, 即证明加强版的柯西条件 对于任意$\varepsilon > 0$, 存在$(\alpha,\mu) \in I \times J$, 对于任意$(\beta,\nu) \in I \times J, \beta \geqslant \alpha, \nu \geqslant \mu$, 有 $d(f_{\alpha\mu}, f_{\beta\nu}) < \varepsilon$. 由 (1) Y^J 中的网，$f_\alpha(M)_{\alpha\in I}$ 一致收敛到 $R(\mu)$. 其柯西条件为, 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\alpha \in I$, 任意 $\beta \geqslant \alpha, \sup\limits_{\nu\in J} d(f_{\alpha\nu}, f_{\beta\nu}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
由 (2),存在$\mu \in J$, 对于任意$\nu \geqslant \mu$ 有 $d(f_{\alpha\mu}, f_{\alpha\nu}) < \frac{\varepsilon}{2}$. 那么 $d(f_{\alpha\mu}, f_{\beta\nu}) \leqslant d(f_{\alpha\mu}, f_{\alpha\nu}) + d(f_{\alpha\nu}, f_{\beta\nu}) < \varepsilon$.

□

定理 7.0.3. 令 X 为拓扑空间，V 是 Banach 空间，$(f_{alpha})_\alpha$ 是 $C(X,Y)$ 中的网，且 $\lim\limits_{\alpha} \|f_\alpha - f\|_\infty = 0$, 则 $f \in C(X,V)$. 故 $C(X,V)$ 在 V^X 和已一致收敛度量下闭，则 $C(X,V)$ 完备.

证明: 对于任意$p \in X$, 要证 $\lim\limits_{x\to p} = f(p)$, 即证对于任意 X 中的网 $\{x_\mu\}_{\mu\in J} \to p$, 我们有 $\lim\limits_{\mu} f(x_\mu) = f(p)$, 即 $\lim_\mu \lim_\alpha f_\alpha(x_\mu) = \lim_\alpha \lim_\mu f_\alpha(x_\mu)$.
只需证 $\{f_\alpha(x_\mu)\}_{(\alpha,\mu)\in I\times J}$ 满足一定的前提条件, 而事实上,对于任意$\alpha \in I, \|f_\alpha(x_p) - f_\alpha(x_\mu)\| \to 0, \lim\limits_{\alpha} \sup\limits_{\mu\in J} \|f_\alpha(x_\mu) - f(x_\mu)\| \leqslant \lim\limits_{\alpha} \sup\limits_{x\in X} \|f_\alpha(x) - f(x)\| \to 0$. □

2. 对任意 ε, 存在 α, 有 $\|f - f_\alpha\| < \varepsilon$, 存在 δ, 对任意 $|x-p| < \varepsilon. |f_\alpha(x) - f_\alpha|$ □

定理 7.0.4. V 是 Banach 空间,X 是一个紧的拓扑空间, 对于 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C(X,V)$, 且 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty$(函数项级数的收敛), 则 $\sum\limits_{n=0}^{f_n}$ 一直收敛于某个函数 g.

例子. $a > 0, z \in \mathbb{C}$ 定义 $a^z = e^{z\dot{\log} a}$.

命题 7.0.5. X 是拓扑空间,

例子. 令 X, Y 是 *Banach* 空间，线性 $T: X \to Y$, 定义 $\|T\| = \sup_{x\in X, x\neq 0}$

例子. $exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty}$, 故 exp 在 $\mathbb{C}$ 上连续.

例子. $exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 连续, 若 $x \geqslant 0$ 则有 $e^x \geqslant 1 + x > 1$, 故对 $x < y$, 有 $e^y = e^{y-x}e^x > e^x$, 于是 $\exp(\mathbb{R}_+)$ 是开区间, 若 $x \leqslant 0$, 则 $e^x = \frac{1}{e^{-x}} \geqslant 0$. 于是 $exp(\mathbb{R}) \subset (0,\infty)$. 于是 $exp(\mathbb{R} \to (0,\infty))$ 同胚, 于是反函数 $\log: (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

例子. $a>0, z\in\mathbb{C}$ 定义 $a^z=e^{z\log a}$, 则 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{C}\to\mathbb{C},(a,z)\mapsto a^z$ 是连续的, 这是因为.$\mathbb{R}_+\times\mathbb{C}\to\mathbb{R},(a,z)\mapsto\log(a),\mathbb{R}_+\times\mathbb{C}\to\mathbb{R},(a,z)\mapsto z$. 由于连续函数的复合也是连续的, 于是 a^z 连续, 并且我们有 $a^{z+w}=e^{(z+w)\log a}=e^{z\log a}e^{w\log a}=a^z\cdot a^w, 1=a^{n+(-n)=a^n\cdot a^{-n}}$. 若 $z\in\mathbb{R}, z\log a\in\mathbb{R}$, 则 $a^z=e^{z\log a}\in(0,+\infty)\in(0,+\infty).a^1=e^{1\cdot\log a}=e^{\log a}=a,a^0=e^{0\cdot\log a}=1.a^n=a^1\times a^1\times\cdots\times a^1=a\times a\times\cdots\times a(n\in\mathbb{Z}_+),a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

定义 7.0.6. V^X 的一个子集 $\mathcal{A}$ 称为在 $p\in X$ 处**等度连续 (equicontineous at p)**. 若对 $\varepsilon>0$, 存在 p 的邻域 U, 对任意 $x\in U$, 有 $\sup_{f\in\mathcal{A}}\|f(x)-f(p)\|<\varepsilon$. 若 $\mathcal{A}$ 在 X 每个点处等度连续, 那么我们称 $\mathcal{A}$ 是 (逐点) 等度连续的. 若 X 是度量空间, 且对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 对于 $x,x'\in X$ 有 $d(x,x')<\delta\Rightarrow\sup\limits_{f\in\mathbb{A}}\|f(x)-f(x')\|<\varepsilon$, 则称 $\mathbb{A}$ 为一致等度连续.

附注. 等度连续与一致收敛的概念是完全对偶的, 用网的观点来看, 一个是对 n 取了极限, 一个是对 x 取了极限.

命题 7.0.7. *若 X 是紧度量空间, 则逐点等度连续与一致等度连续等价.*

证明: 证明与紧上连续函数等价与一致连续函数基本没有区别, 这里略去证明. □

定理 7.0.8. *令 X 拓扑空间,V 是 Banach 空间,$(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是 $C(X,V)$ 中逐点等度连续网, 且 $f_\alpha\to f:X\to V$.*

命题 7.0.9. *X 是拓扑空间, 对 $\{f_n\}\subset C(X,V), f:X\to V$, 假设 $\{f_n\}$ 是逐点收敛到 f. 则对如下命题:*

(1) $\{f_n\}$ 一致收敛到 f;

(2) $\{f_n\}$ 逐点等度连续.

则 (1) $\Longrightarrow$ (2), 且若 X 是紧的, 则 (2) $\Longrightarrow$ (1).

例子. 令 X,Y 是 Banach 空间, 对于线性映射 $T:X\to Y,\|T\|=\sup\limits_{x\in X,x\neq 0}\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}$ 为算子范数,$\mathcal{A}$ 是一些 $X\to Y$ 的线性映射, 且 $\sup\limits_{T\in\mathcal{A}}\|T\|=C<+\infty, A$ 是逐点等度连续的, 即 对于任意$\varepsilon>0, x,x'\in X$ 且 $\|x-x'\|<\frac{\varepsilon}{C}$, 于是 对于任意$T\in\mathcal{A},\|Tx-Tx'\|=\|T(x-x')\|\leqslant C\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$, 即 $\mathcal{A}$ 是一致等度连续的.

第八章　导数与微分

以下 V 是 $F=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的 Banach 空间.

定义 8.0.1. 对 $f:[a,b]\to V$,对于任意$x\in[a,b]$, 若极限

$$\lim_{t\to x,t\in[a,b]\setminus\{x\}}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

是存在的, 则定义 f 再 x_0 处的导数

$$f'(x)=\frac{d}{dt}f(x)=\lim_{t\to x,t\in[a,b]\setminus\{x\}}\frac{f(t)-f(x)}{t-x},$$

而当 $a<x<b$ 时, 则可以写成

$$f'(x)=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

而 $x=a$时, $f'(x)=\lim\limits_{t\to x^+}\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, 也可以写作 $f'^+(x)$, 当 $x=b$ 时, 可以把加号改为减号.

命题 8.0.2. *若 $f:[a,b]\to V$, 或 $\Omega\to V$ 在 x 处可导, 则 f 在 x 处连续.*

命题 8.0.3. *若 $f'(x),g'(x)$ 存在, 则 $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$. 而若 $\lambda:\Omega\to F$ 是函数,$\lambda'(x)$ 存在, 则 $(\lambda\cdot f)'(x)=\lambda'(x)f(x)+\lambda(x)f'(x)$.*

定理 8.0.4 (链式法则)**.** *令 Ω ,τ 是 $\mathbb{C}$ 的开子集, 若 $f\to\tau$ 在 z 处可导,$g:\tau\to V$ 在 $f(z)$ 处可导, 则 $g\circ f$ 在 z 处可导, 我们有 $(g\circ f)'(z)=g'(f(z))f'(z)$.(可以把 Ω 换成 $\mathbb{R}$ 中的区间, 或把 Ω,τ 同时换成区间).*

证明: 取 对于任意$\{z_n\}\subset\Omega\setminus\{z\}$, 令 $z_n\to z$, 我们要计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{g\circ f(z_n)-g\circ f(z)}{z_n-z}=A_n\cdot\dfrac{f(z_n)-f(z)}{z_n-z}$, 其中

$$A_n=\begin{cases}\dfrac{g\circ f(z_n)-g\circ f(z)}{f(z_n)-f(z)}\text{若}f(z_n)\neq f(z).\\ g'(f(z))\text{若}f(z_n)=f(z)\end{cases}$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=g'(f(z))$. □

命题 8.0.5. Ω,τ 是 $\mathbb{C}$ 中的开集,$f:\Omega\to\tau$ 是双射, 若 $z\in\Omega, f'(z)$ 存在, 且 $f'(z)\neq 0$ 且 f^{-1} 在 $f(z)$ 处是连续的, 则 $f^{-1}\to\Omega$ 在 $f(z)$ 处是可导的,$(f^{-1})'\circ(f(z))=\frac{1}{f'(z)}=\frac{1}{f'(z)}$($\Omega,\tau$ 可以换成 $\mathbb{R}$ 上的区间后结果相同).

证明: 取任意 $\tau\setminus f(z)$ 中的点列 $r_n\to f(z)$, 令 $\omega_n=f^{-1}(\gamma_n)$, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f^{-1}(\gamma_n)-f^{-1}(f(z))}{\gamma_n-f(z)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\omega_n-z}{f(\omega_n)-f(z)}=\frac{1}{f'(z)}=\lim_{\psi\to z}\frac{\psi-z}{f(\psi)-f(z)}$$

□

那么, 考虑极限与导数的关系, 是否有 $(\lim\limits_{n\to+\infty}f_n)'=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n'$?

定理 8.0.6 (引理)**.** 令 $\Omega\subset\mathbb{C}$,Ω 是开集, 对任意的 $n\in\mathbb{Z}_+$, 取 $f_n:\Omega\to V$, 假设 f_n 逐点收敛于 f, 若对 $z\in\Omega,\lim\limits_{\omega\to z}\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}|\dfrac{f_n(\omega)-f_n(z)}{\omega-z}-f_n'(z)|=0$, 则 $f'(z)=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n'(z)$.

证明: 由之前的一致收敛网以及逐点收敛网可的交换性即证. □

定理 8.0.7 (引理)**.**

$$\text{对于任意}k\geqslant 2,k\in\mathbb{Z},\quad |\frac{(z+h)^k-z^k}{h}-k\cdot z^{n-1}|\leqslant\frac{k(k-1)}{2}(|z|+|h|)^{k-2}|h|,$$

证明:

$$LHS=\frac{\sum_{j=1}k\binom{k}{j}z^{k-j}h^j}{h}-k\cdot z^{k-1}=\binom{k}{2}z^{k-2}h+\binom{k}{3}z^{k-3}h^2+\cdots+\binom{k}{k}h^{k-1}=h(\binom{k}{2}z^{k-2}+\binom{k}{3}z^{k-3}).$$

□

定理 8.0.8. 令 $g(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n(a_n\in V)$, 收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\lim_{n\to+\infty}\sup\sqrt[n]{\|a_n\|}}>0$, 则 g 在 $B_{\mathbb{C}}(0,R)$ 上处处可导, 且 $g'(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}na_nz^{n-1}$.

证明: $f_n(z)=\sum\limits_{k=0}na_kz^k$, 取 $z\in B_{\mathbb{C}(0,R)}$, 我们要证 $\lim\limits_{h\to 0}\sup\limits_{n}|\dfrac{f_n(z+h)-f_n(z)}{h}-f_n'(z)|=0$.

$$A_n(h)=|\sum_{k=0}na_k(\frac{(z+h)^k-z^k}{h}-kz^{k-1})|\leqslant|h|\cdot\sum_{k=0}^{n}\|a_k\|\cdot\frac{k(k-1)}{2}(|z|+|h|)$$
$$\leqslant|h|(\sum_{k=0}=\infty\|a_k\|\cdot\frac{k(k-1)}{2}\cdot(|z|+|h|)^{k-2}.$$

因为 $0\leqslant|z|<R$, 故而我们可以取 $0<\delta<R-|z|$, 则

$$A_n(h)\leqslant|h|\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\|a_k\|\cdot\frac{k(k-1)}{2}(|z|+\delta)^{k-2}<C|h|$$

□

例子. 幂级数 $g(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\in V)$, 其收敛半径为 $R=\frac{1}{\limsup\sqrt[n]{\|a_n\|}}$, 则其在 $B_{\mathbb{C}}(0,R)$ 内处处可导, 且 $g'(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}na_nz^{n-1}$.

例子. 考虑中学学过的三角函数 $\sin:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\cos:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, 我们定义 $\sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2},\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$.. 由于 $(e^{\alpha z})'=(e^{\alpha z}\cdot\alpha z)'=\alpha\cdot e^{\alpha z}$, 于是 $\sin(z)'=\cos(z),\cos(z)'=-\sin(z)'$

例子. $z=p\in\mathbb{R}$, 则 $\cos t=Ree^{it},\sin t=Ime^{it}$, 事实上 $\overline{e^{w}}=e^{\overline{w}}$. 于是 $1=|e^{it}|^2=e^{it}\cdot e^{it}=\cos^2t+\sin^2t$.

例子. 考虑反函数求导 $\log:(0,\infty)\to\mathbb{R},(\log x)'=\frac{1}{x}$.

例子. $\frac{d}{dt}e^{t^2+it}=(2t+i)e^{t^2+it}$,$f:\Omega\to\mathbb{C},\Omega$是$\mathbb{C}$中的开集,$\gamma:[a,b]\to\Omega$, 若 γ' 存在, 则 $(f\circ\gamma)'=(f'\circ\gamma)\cdot\gamma'$.(一开始引入复导数有利于计算复合函数的导数).

例子. 计算 $\sum_{n=1}^{\infty}$. 引入 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3}=\frac{3}{3\cdot z}$, 而逐项求导知 $f(z)'=\,^{+\infty}_{n=0}z^{n-1}$. 还有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)}{3^n}$ 都可以用这种方法计算, 这给出了计算这种级数的一个新视角.

例子. A 是一个 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 中的复矩阵, 则 $e^{zA}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(zA)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^kz^k}{k!\sum_{k=0}^{+\infty}v_k\cdot z^k}$,$v_k=\frac{A^k}{k!}$. 其收敛半径为 $R=\frac{1}{\limsup\sqrt[n]{\|v_k\|}}$, 我们任然沿用算子范数, 即 $\|B\|=\sup\limits_{v\neq0}\frac{\|B\|}{\|v\|}$, 我们有 $\|AB\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|$, 于是 $\frac{\|A^k\|}{k!}\leqslant\frac{\|A\|^k}{k!}=\frac{C^k}{k!}$, 其中 $C=\|A\|\in[0,+\infty)$, 而 $\limsup\sqrt[k]{\frac{c^k}{k!}}=0$.
于是 e^{zA} 的收敛半径是 ∞, 故有 $(e^{zA})'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k\cdot z^{k-1}A^{k-1}}{k!}=Ae^{zA}=e^{eA}\cdot A$

例子. 考虑一种微分方程,$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}.f'(z)=Af(z),f(0)=v\in\mathbb{C}^N$, 于是有 $f(z)=e^{Az}\cdot v$. 因为此时 $f'(z)=Ae^{Az}\cdot v=A\cdot f(z)$.

附注. 矩阵可导在线性代数里可以化对角化 (Jordan) 标准型来快速解决, 而在分析里, 我们考虑更加一般的例子.

注记. 对于两个矩阵, 有 $(A(z)B(z))'=A'B+AB'$.

例子. 我们考虑 $e^{z\cdot A(t)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A(t)^kz^k}{k!}$,$t\in[a,b]$, 则我们有其连续, 这是因为 $\partial_zf(z,t)=A(t)f(z,t),f(0,t)=v(t),\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, 则有 $e^{A(t)z}v(t)$. 于是 $\sum_{k=0}^{\infty}\sup\limits_{t\in[a,b],0\leqslant|z|}\leqslant R\|\frac{A(t)^k}{k!}z^k\|<+\infty$. 故 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A(t)^kz^k}{k!}$ 是 $C([a,b]\times\overline{B(0,R)},\mathbb{C}^{N\times N})$ 中的一个函数.

定义 8.0.9. 称拓扑空间 X 是**局部紧** (**locally compact**) 的, 若 对于任意$x \in X$, 存在x 的邻域 U 满足 $\overline{U}$ 是紧的, 对这样闭包为紧集的任意 U, 称其为**预紧**的.

例子. 若 $f_n \in C(X,V), X$ 是局部紧的, 若 对于任意 预紧的开集 $U \subset X, \sum_{n=1}^{+\infty}|_{\overline{U}}$ 在 $C(\overline{U},V)$ 范数下是收敛的, 则 $f|U$ 是连续的. 故 f 在预紧集 U 上连续, 由局部紧,f 是处处连续的.

8.1 中值定理

例子. $f:[a,b] \to \mathbb{R}, x \in [a,b]$, 对于 $f(x)' = A > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $y \in (x,-\delta,x_\delta) \cap [a,b]$ 使得 $|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - A| < \frac{A}{2}$, 于是 $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \in (\frac{A}{2}, \frac{3A}{2})$ 大于 0. 故对任意 $y \in (x\delta, x+\delta) \cap [a,b]$, 若 $y > x$, 则 $f(y) > f(x)$; 若 $y < x$, 则有 $f(y) < f(x)$. 因此, 若 $x \in (a,b)$, 且 $f'(x)$ 存在, 且 f 在 x 处取局部极大值或极小值, 则 $f'(x) = 0$.

定理 8.1.1 (Rolle 中值定理)**.** *若 $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ 在 (a,b) 处可导, 若 $f(a) = f(b)$, 则 $x \in (a,b)$ 使 $f'(x) = 0$.*

证明: 若 f 取常值则命题是显然成立的, 而若 f 非常值函数, 则 f 能取到最大值或最小值, 且这两个值是不相等的, 故 存在$x \in (a,b)$ 使 f 在 x 处取到极值, 于是 $f'(x) = 0$. □

例子. $f:[0,2\pi] \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2, f(t) = e^{it}$, 则有 $f(0) = f(2\pi) = 1$, 但 $f'(t) \neq 0$ 对于任意 $t \in (0,2\pi)$.

定理 8.1.2 (Lagrange 中值定理)**.** *若 $f \in ([a,b],\mathbb{R})$ 在 (a,b) 可导, 则存在 $x \in (a,b)$ 使得 $f'(x) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$.*

证明: 考虑函数

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

对其使用 Rolle 中值定理, 于是存在 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $g(x_0)' = 0$, 于是我们有

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0).$$

□

附注. 此定理可以看成 (a,b) 中有一点其切线与两个端点连线是平行的.

推论 8.1.3. *$f \in C([a,b],\mathbb{R})$ 在 (a,b) 处处可导, 则以下命题等价:*

(1) $f'(x) \geqslant 0$ 对于任意$x \in (a,b)$;

(2) f 在 $[a,b]$ 上是递增的;

且若 $f'(x) > 0$(对于任意$x \in (a,b)$), 则 f 是严格递增的.

证明: 我们先来证 (1) $\Longrightarrow$ (2).
对于任意$a \leqslant x < y \leqslant b$, 由 Lagrange 定理,存在$z \in (x,y)$ 使 $f(y)-f(x) = f'(z)\cdot(y-x) \geqslant 0$.
我们在来证 (2) $\Longrightarrow$ (1), 只需证若 (1) 不成立, 则 (2) 不成立.
存在$x \in (a,b)$ 使 $f'(x) < 0$, 存在$y > x, y \in (a,b)$使$f(y) < f(x)$, 故 f 不是递增的 • 假设 f' 在 (a,b) 上恒正, 由 (1) $\Longrightarrow$ (2),f 单调上升, 对于 $x < y$, 若存在 $f(x) = f(y)$, 由 Rolle 中值定理, 则存在 $z \in (x,y)$ 使得 $f'(z) = 0$, 矛盾! □

定理 8.1.4. *若 $f \in C([a,b],V)$ 在 (a,b) 上处处导数恒为 0, 则 f 为常值, 即 对于任意$x \in [a,b]$,$f(x) = f(a)$.*

推论 8.1.5. *若 $f,g \in C([a,b],V)$, 且 $f' = g'$ 在 (a,b) 上处处成立, 则 $f(x) = g(x) + C$, 其中 C 是一个常数.*

证明: $(V = \mathbb{R})$,对于任意$x \in (a,b]$, 由 Lagrange 定理,对于任意$y \in (a,b)$ 使 $a = f'(y) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, 故 $f(x) = f(a)$. 而当 $V = \mathbb{R}^N$ 是有限维空间时, 考虑各分量即可. □

命题 8.1.6. *$f \in C([a,b],V)$, f' 在 (a,b) 上存在且为 0. 则 f 为常值.*

证明: (想法) 只需证对任意 $a < \alpha < \beta < b$,$f(\alpha) = f(\beta)$, 则由连续性, f 常值, 于是我们只需考虑 $[\alpha,\beta]$ 即可.
$f'(\alpha) = 0$, 即对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对任意 $x \in [\alpha, \alpha+\delta]$, 有 $|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - 0| \leqslant \epsilon$, 即 $|f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon(x-\alpha)$. 考虑 $p_1 \in (\alpha, \alpha+\varepsilon)$, 于是有 $f(p_1 - f(\alpha) \leqslant \epsilon(p_1-\alpha))$, 再取 $p_2 \in [p_1, p_1+\varepsilon]$, 于是, $|f(p_2)-f(p_1)| \leqslant \varepsilon(p_2-\alpha)$, 于是由三角不等式有, $f(p_2)-f(\alpha) \leqslant |p_2-\alpha|$, 重复上面的操作我们可以得到一串数列, 我们希望由此证明 $|f(\beta) - f(\alpha)| \leqslant |\beta - \alpha|$
我们可以考虑利用 (a,b) 的有界性, 对于 $\epsilon > 0$ 我们可以取出一个 $\delta > 0$, 使得 对于任意$x,y \in (a,b)$,$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \epsilon|x-y|$. 具体如下:
令 $E_\alpha = \{x \in [\alpha,\beta] | \|f(x) - f(\alpha)\| \leqslant \epsilon(x-\alpha)\}$. 令 $x = \sup E_\alpha \in E_\alpha$, 若 $x < \beta$, 存在$p > x$, $|f(p)-f(x)|, |f(x)-f(\alpha)| \leqslant \epsilon\cdot(x-\alpha)(x \in E_\alpha)$, $|f(p)-f(\alpha)| \leqslant \epsilon(p-\alpha)$, 于是 $p \in E_\alpha$, 与 $x = \sup E_\alpha$ 矛盾! 故 $x = \beta, \beta \in E_\alpha$, 于是 $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \epsilon|x-y|$ 对任意 $\epsilon > 0$ 成立, 于是 $\|f(x) - f(y)\| = 0$, 故 f 是常值函数. □

定理 8.1.7. *若 $f \in C([\alpha,\beta],V)$ 和 $g \in C([a,b],\mathbb{R}$ 在 (a,b) 上可导, 且对于任意 $x \in (a,b)$, 有 $\|f'(x)\| \leqslant g(x)$(特别地,g' 在 (a,b) 上非负, 则 g 上升) 则 $\|f(b) - f(a)\| \leqslant g(b) - g(a)$.*

证明: 对任意 $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$, 任意 $\varepsilon > 0$, 要证明 $\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leqslant g(\beta) - g(\alpha) + \varepsilon(b-a)$.
$E_\epsilon = \{x \in [\alpha,\beta] : \|f(x)-f(\alpha)\| \leqslant g(x)-g(\alpha)+\varepsilon(x-a)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 闭子集. 令 $X = \sup E_{eps}$,

若 $x<\beta$, 对任意 $y>x$. 记 $f(y)-f(x)=f'(x)(y-x)+u(y)(y-x)$. $g(y)-g(x)=g'(x)(y-x)+V(y)(y-x)$, 当 $y\to x$, $u(y),v(y)\to 0$.

故 存在$y\in(x,\beta)$ 使 $\|u(y)\|<\frac{\epsilon}{2},|v(y)<\frac{\epsilon}{2}|,\|f(y)-f(x)\|\leqslant\|f'(x)\|(y-x)+\frac{\epsilon}{2}(y-x)\leqslant g'(x)(y-x)+\frac{\epsilon}{2}(y-x)=g(y)-g(x)-v(y)(y-x)+\frac{\epsilon}{2}(y-x)\leqslant g(y)-g(x)+\frac{\epsilon}{2}(y-x)+\frac{\epsilon}{(}y-x)$

由 $x\in E_\varepsilon$. $\|f(x)-f(\alpha)\|\leqslant g(x)-g(\alpha)+\varepsilon(x-\alpha)$, 于是 $\|f(y)-f(\alpha)\|\leqslant g(y)-g(\alpha)+\varepsilon(y-\alpha)$. 故 $y\in E_s$, 与 $x=\sup E_\varepsilon$ 矛盾. □

定理 8.1.8 (有限增量定理)**.** *令 $f\in C([a,b],V)$ 在 (a,b) 上可导且 $M=\sup\limits_{a<x<b}\|f'(x)\|<+\infty$, 则 $\|f(b)-f(a)\|\leqslant M(b-a)$.*

证明: 令 $g(x)=Mx$. □

命题 8.1.9. *若 $f_1,f_2\in C([a,b],V),f_1',f_2'$ 在 (a,b) 存在,$f_1'=f_2'$, 则 f_1-f_2 是常值.*

例子. $A\in\mathbb{C}^{N\times N},b\in\mathbb{C}^N$, 满足 $\left\{\ f'(x)=Af(x)f(0)=u\right.$ 则 $f(x)=e^{Ax}$. 是唯一解.

证明: 若 f 是一个解, 则 $g(x)=e^{-Ax}f\implies g'=0$. 于是 g 为常值函数, $g(x)=g(0)$, $f(0)=v$, $g=e^{Ax}v$. □

命题 8.1.10. *若 $f\in C[(a,b),\mathbb{R}]$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'(a)\leqslant f'(b)$ 则对任意 $\lambda\in[f'(a),f'(b)]$, 则存在 $x\in[a,b]$, 使得 $f'(x)=\lambda$.*

证明: 令 $g(x)=f(x)-\lambda x$ 不妨设 $f'(a)<\lambda<f'(b)$ 则 $g'(a)\leqslant 0\leqslant g'(b)$. 取 $x\in[a,b]$ 使得 g 在 x 处取到最小, 则 $x\neq a$, $x\neq b$, $x\in(a,b)$, 故 $g'(x)=0$. □

推论 8.1.11. *若 $f\in(C[a,b],\mathbb{R})$ 在 (a,b) 上可导, 且 f' 处处非零, 则 f' 恒正 (f 严格递增), 或 f' 恒负 (f' 严格递减), 特别地, $f:[a,b]\to[f(a),f(b)]$ 或 $f(b),f(a)$.*

定理 8.1.12 (Cauchy 中值定理)**.** *令 $a<b,f,g\in C([a,b],\mathbb{R})$ 在 (a,b) 上可导, 且对于任意$x\in(a,b)$ 有 $g'(x)\neq 0$, 则 $g(a)\neq g(b)$, 则 存在$x\in(a,b)$ 满足 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.*

证明: 令 $\dfrac{(f\circ g^{-1})(B)-(f\circ g^{-1})}{B-A}=(f\circ g^{-1}(y)).(y\in(A,B))(A=g(a),B=g(b))$ 则

$$(f\circ g^{-1})'=(f'\circ)g^{-1}(g^{-1})'$$
$$(f\circ g^{-1})(g(x))=(f\circ g^{-1})(g(x))\cdot(g^{-1})'(g(x))=\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

附注. 若不要求 $g'\neq 0$, 则 存在$x\in(a,b)$ 使 $(g(b)-g(a))f'(x)=(f(b)-f(a))g'(x)$.

证明: $h(x)=(g(b)-g(a))f(x)-(f(b)-f(a))g(x)$. 用 *Rolle* 中值定理. $\square$

定理 8.1.13 (L'Hospital). 令 $f,g\in C((a,b),\mathbb{R})$ 在 (a,b) 上可导, 且 g' 处处不为 0, 并且只要求 $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$.
假设

(1)
$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\in[-\infty,+\infty]$$
存在;

(2) 要么 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ 要么 $\lim_{x\to a}|g(x)|=+\infty$. 则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$, 且把 $x\to a$ 替换为 $x\to b$ 则结果亦成立.

证明: 令 $\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=A$, 若 $x=y$. 考虑 $a\in\mathbb{R}$, 我们证明
$$\lim_{(x,y)\to(a,a)}\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=A.$$
实际上，对于任意$\epsilon>0$,存在$\delta>0$,对于任意$z\in\mathbb{R},|z-a|<\delta,|\frac{f'(z)}{g'(z)}-A|<\epsilon$. 故若 $a<x<y<a+\delta$, 存在 $z\in(x,y)$, 使得 $\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{f'(z)}{g'(z)}$, 故 $|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}-A|<\epsilon$

对 $\frac{0}{0}$ 型中,$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to a}\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=A$. 对 $\frac{0}{\infty}$ 型, 只需证明对于任意点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}\subset(a,b)$, 若 $x_n\to a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=A$, 取任意子列 $\{x_{n_K}\}$ 满足 $f(x_{n_k})/g(x_{n_k})$ 收敛到某个 $B\in[-\infty,+\infty]$, 记 $u_k=x_{n_k}$, 已知 $\lim\limits_{k,l\to\infty}\frac{f(u_k)-f(u_l)}{g(u_k)-g(u_l)}=A$, 于是 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{f(u_k)-f(u_l)}{g(u_k)-g(u_L)}=\lim\limits_{k\to\infty}(\frac{f(u_k)}{g(u_k)}-\frac{u_l}{u_k})\cdot\frac{g(u_k)}{g(u_k)-g(u_l)}=B$. 于是 $A=\lim\limits_{l\to+\infty}\lim\limits_{k\to\infty}\frac{f(u_k)-f(u_l)}{g(u_k)-g(u_l)}=\lim\limits_{l\to+\infty}B=B$, 故 $B=A$. $\square$

附注. 这道题的直觉来自于一开始的双极限
$$|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}-A|<\epsilon$$
, 我们这是第一个极限过程, 在 $0<|x-a|,|y-a|<\delta$ 范围内, 我们仍然令 x,y 有一定的距离, 同时令 $x\to a$, $\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\to\frac{f(x)}{g(x)}\approx\frac{f(x)}{g(x)}$, 有 $|\frac{f(x)}{g(x)}-A|\leqslant\epsilon$.

下面我们来严格地定义高中学过的三角函数以及其各项代数性质, 并严格地定义 π.

例子.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\cdots\lim_{n\to\infty}\frac{n!x}{e^x}=\lim_{x\to\infty\frac{n!}{e^x}}=0$$

例子. $\cos x=Ree^{ix}=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x=Ime^{ix}=\frac{e^{ix}-e^{=ix}}{2i}$. 可以发现 $\cos'x=-\sin x,\sin'x=\cos x$. $\sin x|_{x=0}=1$, $cos'x|_{x=0}=0$, 我们有 $\sin'x$ 在 0 附近大于 0, 于是 $\sin x$ 在 0 附近严格单调递增.

引理 8.1.14. *存在 $x \geqslant 0$, 使得 $\cos x = 0$.*

证明: 若不存在 $x \geqslant 0$, 使得 $\cos x = 0$, 由介值定理, 对任意 $x \geqslant 0$,$\cos x > 0$. 因此 $\sin'$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒正, 故 $\sin x$ 严格递增, 故 $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x = A \in [-\infty, +\infty]$, 且 $A > 0$.
由 $L'Hopital$ 法则, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} -\sin x = -A < 0$. 矛盾! □

定义 8.1.15. $\pi = 2\inf\{x \geqslant 0, \cos x = 0\}$. 由于 $\inf\{x \geqslant 0, \cos x = 0\}$ 是闭集, 于是 $\frac{\pi}{2} \in \inf\{x \geqslant 0, \cos x = 0\}$

命题 8.1.16. *$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \cos(\frac{\pi}{2} = 0), \cos 0 = 1, \sin 0 = 0.\sin, \cos$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上恒正, 在 $[0, \frac{\pi}{2}], \sin$ 严格递增,$\cos$ 严格递减.*

证明: $\sin' x = \cos x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 严格大于 0(介值定理),$\sin \frac{\pi}{2} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi}{2}} = 1$. □

命题 8.1.17. *$\sin -x = -\sin x, \cos -x = \cos x$. 这由其定义立得.*

命题 8.1.18. *$\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - x), \cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$.*

证明: $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i, e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos(-\frac{pi}{2}) + i\sin(frac\pi 2) = -i$,$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \frac{e^{ix}e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2} + e^{-ix}e^{i\frac{\pi}{2}} = \sin x$. □

附注. 由 $e^{i\pi} = (e^{\frac{i\pi}{2}})^2 = -1$, 于是 $\cos(x + 2\pi) = \cos x, \sin(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi)$.

命题 8.1.19. *$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$, $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, 这由三角函数的指数定理即可.*

推论 8.1.20. *$\sin 2x = 2\sin x \cos x$, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. 故 $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, 这由 $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$ 可算出.*

8.2 Taylor 展开

定义 8.2.1. 定义 $C^n(I, V) = \{f \in V^I, f^{(n)}$在 I 上处处存在且连续$\}$. 其中 $I = [a, b]$, V 为一 Banach 空间.

$c^1(I, V)$ 上有一个自然的范数,$\|f\|_{C^1} = \|f\|_{+\infty} + \|f'\|_{\infty}$. 事实上, 在这个范数下, 它是完备的, 但这需要积分等知识, 我们暂不介绍.

定理 8.2.2 (Leibniz 公式)**.** *令 $f, g : \Omega \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, Ω 是 $\mathbb{C}$ 中开集或 $\mathbb{R}$ 上区间, 若 f, g 在 $z \in \Omega$ 处 n 次可导, 则 $(f \cdot g)^{(n)}(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)}(z) \cdot g^{(i)}(z)$.*

证明: 对 n 使用归纳法, 知 $(f\cdot g)^{(n)}(z)=\sum_{j=0}^{n}C_{n,j}f^{n-j}(Z)g^{(j)}(z)$, 而其中 $C_{n,j}\in\mathbb{N}$ 与 f,g,z 是无关的. 令 $f(x)=e^{\alpha x}$,$g(x)=e^{\beta x}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

$$(f\cdot g)^{(n)}(a)=(\frac{d}{dx})^{n}e^{(\alpha+\beta)x}|_{x=0}=(\alpha+\beta)^{n}e^{(\alpha+\beta)x}|_{x=0}=(\alpha+\beta)^{n}=\sum_{j=0}^{n}\alpha^{n-j}\beta^{j}$$

.

$$f^{(n-j)}(0)=\alpha^{n-i}e^{\alpha x}|_{x=0}=\alpha^{n-i},g^{(i)}(0)=\beta^{i},\text{ 于是 }c_{n,i}=\binom{n}{i}.$$

□

定理 8.2.3 (Taylor 展开 (Peano 余项)). $f:[a,b]\to V$, $n=1,2,3\cdots$, $f'(a),f''(a)\cdots f^{(n)}(a)$ 存在, 则在 (a,b) 上有 $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-a)^{k}+o((x-a)^{n})$. 其中 $o((x-a)^{n})$ 代表定义在 $a\in[a,b]$ 的一个小邻域上的取值在 V 中的函数, 且 $\lim_{x\to a^{+}}\frac{o((x-a)^{n})}{(x-a)^{n}}=0$.

证明: 令 $s_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)(a)}}{k!}(x-a)^{k}, g(x)=f(x)-s_n(x)$, 于是 $g(a)=g'(a)=\cdots=g^{(n)}(a)=0$. 只需对 g 证明 Taylor 公式. 即证 $g(x)=o((x-a)^{n})$, 即 $\lim_{x\to a^{+}}\frac{g(n)(x)}{(x-a)^{n}}=0$, 我们考虑对 n 做归纳. 由有限增量定理 $\|g(x)\|\leqslant(\sup_{a\leqslant t\leqslant x}\|g'(t)\|)(x-a)$, 由 $n-1$ 的情况, 我们有 $g'(x)=o((x-a)^{n-1})$, $\lim_{x\to a^{+}}\frac{g'(x)}{(x-a)^{n-1}}=0$. 那么对任意的 $\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 于是任意 $x\in[a,a_\delta)$ 有 $\sup_{a\leqslant t\leqslant x}\|g'(t)\|\leqslant\varepsilon(x-a)^{n-1}$, 故 $\|g(x)\|\leqslant\varepsilon(x-a)^{n}$, 于是 $g(x)=o((x-a)^{n})$.

□

证法 2. 我们给出 $V=\mathbb{R}$ 时特殊情况的另一证法, 由洛必达法则, $\lim_{x\to a^{+}}\frac{g(x)}{(x-a)^{n}}=\lim_{x\to a^{+}}\frac{g'(x)}{n(x-a)^{n-1}}=\lim_{x\to a^{+}}\frac{g''(x)}{n(n-1)(x-a)^{n-2}}=\cdots=\lim_{x\to a^{+}}\frac{g^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)}=\frac{1}{n!}g^{(n)}(a)=0$.

□

定理 8.2.4 (高阶有限增量定理). 令 $n\in\mathbb{N}$, $f\in C^{n}([a,b],V)$, 且 $f^{(n+1)}$ 在 (a,b) 上处处存在. 则对任意 $x\in[a,b]$, 有 $\|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^{k}\|\leqslant\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{0\leqslant t\leqslant x}\|f^{(n+1)}(t)\|$,

证明: $n=0$ 已知, 假设 $n-1$ 已证, 令 $g(x)=f(x)-s_n(x)$, 于是 $g(a)=g^{(1)}(a)=\cdots g^{(n)}(a)=0$, $g^{n+1}=f^{n+1}$, 只需证 $\|g(x)\|\leqslant\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{a\leqslant t\leqslant x}\|g^{(n+1)}\|(t)$, 已知 $\|g'(t)\|\leqslant\frac{(x-a)^{n}}{n!}\sup_{a\leqslant t\leqslant x}\|g^{(n+1)}(t)\|$. 令 $M=\sup_{a\leqslant t\leqslant b}$. (回忆, 若 $\|f'\|\leqslant h'\implies\|g(b)-g(a)\|\leqslant h(b)-h(a)$. $\|g(x)-g(a)\|\leqslant\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}|_{a}^{x}M$, 于是 $\|g(b)\|\leqslant\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}M$

□

定理 8.2.5 (Lagrange 余项). 令 $n\in\mathbb{N}, f\in C^{n}([a,b],\mathbb{R}), f^{(n+1)}$ 在 (a,b) 上存在, 则对于任意$x\in(a,b)$, 存在$\xi\in(a,x),\eta\in(a,b)$ 满足

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)}(x-a)^{n+1}=\sum_{k=0}n\frac{f^{(k}(b)}{k!}(x-b)^{k}+\frac{f^{(n+1)(\eta)}}{(n+1)!}(\eta-b)^{n+1}$$

.

证明: 同样地, 令 $g(x)=f(x)-s_n(x)$, 则 $g^{(0)}(a)=g^{(1)}(a)=\cdots=g^{(n)}(a)=0, g^{(n+1)}(a)=f^{(n+1)}(a)$ 那么

$$\frac{f(x)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{g'(x_1)}{(n+1)(x_1-a)^n}=\cdots\frac{g^{(n+1)\psi}}{(n+1)!}$$

对 $b>x_1>x_2>\cdots>x_n>\psi>a$, □

例子. $\log:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, 有 $\log' x=\frac{1}{x}, \log'' x=-\frac{1}{x^2}, \cdots \log^{(n)} x=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$ 对于 $n\in\mathbb{Z}_+$. 在 $x=1$ 处, 取值为 $(-1)^{n-1}(n-1)!$, 于是 $\log x=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k(x-1)^k}+R_{n+1}(x)$. 我们希望证明 对于任意$0<r<1, [1-r,1+r]$ 上 R_{n+1} 一致收敛到 0. 由 Lagrange 余项/高阶有限增量定理, 有 $|R_{n+1}(x)|\leqslant\frac{|x-1|^{n+1}}{(n+1)!}|\sup\limits_{1\leqslant t\leqslant x或x\leqslant t\leqslant 1}|\log^{(n+1)}(t)|=\frac{|x-1|^{n+1}}{n+1}|\sup\limits_{1\leqslant t\leqslant x或x\leqslant t\leqslant 1}\frac{1}{t^{n+1}}|$ 我们先考虑 $x\geqslant 1$ 的情况, 若 $1\leqslant x\leqslant 1+r$, 取 $1\leqslant t\leqslant x, \frac{1}{t^{n+1}}\leqslant\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\leqslant\frac{r^{n+1}}{n+1}$. 若 $1-r\leqslant x\leqslant 1$, 则 $x\leqslant t\leqslant 1$, 于是 $\frac{1}{t^{n+1}}\leqslant\frac{1}{x^{n+1}}|R_{n+1}(x)|\leqslant\frac{1}{n+1}(\frac{1}{1-r}-1)^{n+1}=\frac{1}{n+1}(\frac{r}{1-r})^n$. 只有当 $0<r<\frac{1}{2}$, $0<\frac{r}{1-r}<1$, 才有 $|R_{n+1}|$ 一致收敛到 0.

例子. 对任意 $0<r<1$, $\log(1+x)$ 在 $x=0$ 的 Taylor 展开在 $[-r,r]$ 一致收敛到 $\log(1+x)$.

证明: 记 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$ 的收敛半径是 1, 于是 $f(x)$ 在 $[-r,r]$ 上一致收敛. 由级数一致收敛, 于是由级数逐项求导公式 $f'(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}=x^{k-1}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$ 在 $[-r,r]$ 上一致收敛 $f'(x)$. 因此,$f'(x)=\frac{1}{1-(-x)}=\frac{1}{1+x}$, 于是 $g(x)=\frac{1}{1+x}, g'(x)=\frac{1}{1+x}$, 故 $f-g$ 为常值函数, 又 $f(0)=g(0)=1$, 故而有 $f=g$. □

例子. 令 $x\in\mathbb{C}, 0<r<1, (1+x)^\alpha, (1+x)\alpha=e^{\alpha\cdot\log(1+x)}, (1+x)^\alpha$ 在 $[-r,r]$ 被其 *Taylor* 展式 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k$ 一致逼近. 其中 $\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$

证明: 令 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$. 我们来计算其收敛半径,

$$\frac{\binom{\alpha}{k+1}x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k}x^k}=\frac{\alpha-k}{k+1}x^k$$

, 可以发现当 $x<1$ 时 $f(x)$ 收敛, 当 $x>1$ 时原级数发散, 故收敛半径为 1. 令 $g(x)=(1+x)^\alpha$, $g'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$, 即 $(1+x)g'(x)=\alpha g(x)$, $g'(x)=\frac{\alpha}{x+1}g(x)$, 由级数求导公式, 我们有 $f'(x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}k\binom{\alpha}{k}x^{k-1}=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(k+1)\binom{\alpha}{k+1}x^k$, 其在 $[-r,r]$ 内一致收敛. 回忆

$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{0\leqslant i\leqslant k} a_i b_{-i} z^k$. $(1+x)f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(k\binom{\alpha}{k} + (k+1)\binom{\alpha}{k+1})x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\alpha\binom{\alpha}{k}x^k = \alpha f(x)$. 于是 $f'(x) = \frac{\alpha}{1+x}f(x), f(0) = g(0) = 1$. 我们下面来证明此微分方程某点处值确定时解唯一, 这样就可以有唯一性得到 $f(x) = g(x)$. □

引理 8.2.6. *$I \subset \mathbb{R}$ 是开区间, $0 \in I$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$或$\mathbb{C}$. 令 $\phi = c(I, \mathbb{F}^{n\times n})$. 若 $u \in C(I, \mathbb{F}^n)$, 满足 $u' = \phi u$, 且 $u(0) = 0$, 则对任意 $x \in I$, 有 $u(x) = 0$. (即线性微分方程在某点处值为 0, 则处处为 0).*

证明: 令 $\Omega = \{x \in I | u(x) = 0\} = u^{-1}(0)$, 那么 Ω 是 I 的闭子集, 并且非空, 这是因为已知 $0 \in \Omega$. 我们想利用 $\mathbb{R}$ 的连通性来证 $\Omega = \mathbb{F}$, 则只需证 Ω 在 I 中是开集. 对任意 $p \in \Omega$, 我们要来证 p 是内点, 只需取一个合适的 r 使 $[p-r, p+r] \in \Omega$. 令 $C = \sup_{-r\leqslant x\leqslant r}\|\varphi(x)\|$, 令 $\delta = \min\{\frac{1}{2c}, r\} > 0$. 令 $M = \sup_{p-\delta\leqslant x\leqslant p+\delta}\|u(x)\|$. 要证 $M = 0$, 从而 $(p-\delta, p+\delta) \subset \Omega$, 对于任意$x \in \ p-\delta, p+\delta)$, $\|u'(x)\| = \|\pi(x)u(x)\| \le C\cdot M = (C\cdot Mx)'$. $\|u(x)\| = \|u(x)-u(p)\| \le C\cdot M(x-p) \le CM\cdot\delta \le \frac{1}{2}M$(对于任意$x \in [p-\delta, p+\delta]$), $M \le \frac{1}{2}M \Longrightarrow M = 0$.

例子.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

□

8.3 凸函数

定义 8.3.1. 令 I 是 $\mathbb{R}$ 上的开区间, 令 $f : I \to \mathbb{R}$, 称为**凸函数** (**Convex function**), 若对于任意$x, y \in I$, 对于任意$t \in [0,1]$ 有 $f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y)$.

命题 8.3.2. *令 $z = tx + (1-t)y$,$u = f(x)$,$w = f(y)$, $v = f(z)$ 我们有以下等价*

(1) $\leqslant tu + (1-t)w$.

(2) $\dfrac{v-u}{z-x} \leqslant \dfrac{w-v}{y-z}$.

(3) $\dfrac{v-u}{z-x} \leqslant \dfrac{w-u}{y-x}$.

(4) $\dfrac{w-u}{y-x} \leqslant \dfrac{w-v}{y-z}$.

推论 8.3.3. *$f : I \to \mathbb{R}$ 是凸函数, 当且仅当对任意 $x, y, z \in I$, 若 $x \leqslant y \leqslant z$ 则以下三者之一成立 (此时另外两个也成立)*

(1) $\dfrac{f(z)-f(z)}{z-x} \leqslant \dfrac{f(y)-f(z)}{y-z}$

(2) $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$

(3) $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \dfrac{f(y)-f(z)}{y-z}$.

推论 8.3.4. $f: I \to \mathbb{R}$ 是凸函数, 则对 $a < b \leqslant c < d \in I$, 我们有

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(d)-f(c)}{d-c}.$$

命题 8.3.5. $I \subset \mathbb{R}, f: I \to \mathbb{R}$ 是凸函数, 对于任意 $x_0 \in I$, $f'^{+}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, 和 $f'^{-}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在 (故 f 在 x_0 处连续), 若 $a, b \in I$, 且 $a < x_0 < b$, 则 $\dfrac{f(a)-f(x_0)}{a-x_0} \leqslant f'^{-}(x_0) \leqslant f'^{+}(x_0) \leqslant \dfrac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}$.

证明: $\dfrac{f(a)-f(x_0)}{a-x_0} \leqslant \dfrac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}$, 左式随 a 的增大而增大, 右式随着 b 的减小而减小. 故令 $a \to x_0^-$, 有 $\dfrac{f(a)-f(x_0)}{a-x_0} \leqslant f'^{-}(x_0)$, 类似的 $\dfrac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}$, 令 $a \to x_0^-, b \to x_0^+$, 有 $f'^{-}(x_0) \leqslant f'^{+}(x_0)$. □

命题 8.3.6. 假设凸函数 $f: I \to \mathbb{R}, x_0 \in I$ 是内点, 对于任意 $x \in I$, 对 $x \geqslant x_0$, 有 $f(x) - f(x_0) \leqslant f'^{+}(x_0)(x-x_0) \leqslant f'^{-}(x_0)$, 对 $x \leqslant x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant f'^{-}$, 故 $f(x) - f(x_0) \geqslant \max\{f'^{+}(x-x_0), f'^{-}(x_0)(x-x_0)\}$.

定理 8.3.7 (Jensen 不等式)**.** 对于凸函数 $f: I \to \mathbb{R}$, 对于任意$n \in \mathbb{Z}_+$, 对于任意$x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$, 对于任意$0 \leqslant t_1, t_2, \cdots, t_n \leqslant 1$ 满足 $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$. 则有 $f(t_1x_1 + t_2x_2 \cdots t_nx_n) \leqslant t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \cdots + t_nf(x_n)$.

证明: 令, 对于 y 是内点 $y = t_1x_1 + \cdots + t_nx_n \in I$, 对于任意 i, $f(x_i) - f(y) \leqslant f'^{+}(y)(x_i - y)$. 于是 $\sum\limits_i t_if(x_i) - \sum\limits_i t_if(y) \leqslant f'^{+}(y) \geqslant f'^{+}(y)y - f'^{+}(y)y = 0$. 于是 $\sum\limits_{t_i} f(x_i) - f(y) \geqslant 0$

对于 y 是内点, 则 y 应当是上界或者下界, 若是上界, 则有 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, 从而等号成立. □

例子. $-\log x$ 是 $(0, \infty)$ 上的凸函数.

证明: 对于 $0 < \lambda_1, \cdots \lambda_n \leqslant 1$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. 也即 $x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} \leqslant \lambda_1x_1 + \cdots + \lambda_nx_n$(加权几何平均). □

定理 8.3.8 (Young 不等式). 若 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 有

$$x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}\leqslant \frac{x}{p}+\frac{y}{q}.$$

定理 8.3.9. 令 X 是集合,$1<p,q<+\infty,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,f,g:X\to[0,+\infty)$, 则有

$$\sum_{x\in X}f(x)g(x)\leqslant(\sum_{x\in X}f(x)^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{x\in X}g(x)^q)^{\frac{1}{q}}$$

.

定理 8.3.10 (Minkowiski 不等式). $(\sum_{x\in X}(f(x)+g(x))^p)^{\frac{1}{p}}\leqslant(\sum_{x\in X}f(x)^{\frac{1}{p}})^p+(\sum_{x\in X}g(x)^p)^{\frac{1}{p}}$.

证明: 不妨设 $f\neq 0,g\neq 0$, 令 $\alpha(x)=\dfrac{f(x)}{(\sum_{x\ X}f(x)^p)^{\frac{1}{p}}}.\beta(x)=\dfrac{g(x)}{(\sum_{x\in X}g(x)^q)^{\frac{1}{q}}}$. 于是 $\sum_{x\in X}\alpha(x)^p=\sum_{x\in X}\beta(x)^q=1$. 由Young不等式, 有 $\alpha(x)\beta(x)\leqslant\dfrac{\alpha(x)^p}{p}+\dfrac{\beta(x)^q}{q}$, 故 $\sum_{x\in X}\alpha(x)\beta(x)\leqslant\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. □

例子. 当 $p=q=2$ 时, 可以得到 Cauchy-Schwartz 不等式

$$|\sum_{x\in X}f(x)g(x)|\leqslant\sqrt{\sum_{x\in X}f(x)^2}\sqrt{\sum_{x\in X}g(x)^2}$$

若定义范数 $\|\cdot\|_p=(\sum\limits_{x\in X}|f(x)|^p)^{\frac{1}{p}}$ 与 $\|\cdot\|_q=(\sum\limits_{x\in X}|f(x)|q)^{\frac{1}{q}},(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$, 由 Minkowiski 不等式, 知它们确实是两个范数, 由 Hölder 不等式, 若定义 $G:f\mapsto\sum\limits_{x\in X}f(x)g(x)\in\mathbb{C}$, 可以得到 $|G(f)\leqslant\|f\|_p\|g\|_q$, 那么 G 是一个有界的 $l^p(X,\mathbb{C}\to\mathbb{C})$ 上的有界线性算子.

定理 8.3.11 (Minkowski). $\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$.

证明: 由Hölder不等式, 有

$$\sum_{x\in X}f\cdot(f+g)^{p-1}\leqslant(\sum f^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{x\in X}(f+g)^{(p-1)q})^{\frac{1}{q}}\leqslant(\sum_{x\in X}f^p)^{\frac{1}{q}}(\sum_{x\in X}(p+q)^p)^{\frac{1}{q}}$$

$$\text{类似地}\sum_{x\in X}g\cdot(f+g)^{p-1}\leqslant(\sum g^p)^{\frac{1}{p}}(\sum(f+g)^p)^{\frac{1}{q}}$$

$$\text{于是}\sum_{x\in X}(f+g)^p\leqslant(\|f\|_p+\|g\|_p)\cdot(\sum(f+g)^p)^{\frac{1}{q}}$$

□

定理 8.3.12. 令 I 是开区间,$f: I \to \mathbb{R}$ 则以下性质等价:

1. f 是凸函数;
2. f 连续且 f'^{+} 处处存在且递增.

证明: (1) $\Longrightarrow$ (2) 显然;
我们对 (2) $\Longrightarrow$ (1) 给出证明: 只需证 对于任意$t, x, y \in I$, 若 $t < x < y$ 则有 $\frac{f(x)-f(t)}{x-t} \leqslant \frac{f(y)-f(t)}{y-t}$ 定义 $g_t : I_{\geqslant t} = I \cap [0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$g_t(x) = \begin{cases} f'^{+}(t) & x = t \\ \frac{f(x)-f(t)}{x-t} & x > t \end{cases}$$

则 $g(x)$ 是一个连续的函数

$$g_t'^{+}(x) = \frac{f'^{+}(x)(x-t) - (f(x) - f(t))}{(x-t)^2}$$

. 将分子部分记为 $h_x(t)$. 固定 x, 考虑 $t < x$,$h_X(t)|_{t=0} = 0, h_x'^{+}(t) \leqslant 0 (t < x)$ 于是 h_x 是递减的 (假设已知右导数恒大于 0，则函数递增). 固有 $h \geqslant 0$, 从而 $h''(t) = -f'^{+}(x) + f''(t) \leqslant 0$.
那么我们只需证明如下的引理: □

引理 8.3.13. 若 h 是闭区间 $[a, b]$ 上连续实值函数, 且 h'^{+} 在开区间 (a, b) 上处处存在, 且非负, 则 $h(a) \leqslant h(b)$

证明: 任取 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 满足 $a < \alpha < \beta < b$, 只需证 $h(\alpha) \leqslant h(\beta)$. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 设 $E_\varepsilon = \{x \in [\alpha, \beta] : h(\beta) - h(\alpha) \geqslant -(x - \alpha)\}$, 有 E_ε 是 $[\alpha, \beta]$ 的闭子集.

令 $x = \sup_{r_\epsilon \in E_\varepsilon,}$ 则 $h(x) - h(\alpha) \geqslant -\varepsilon(x - \alpha)$, 要证 $x = \beta$, 若 $x < \beta$, 由于 $h'^{+}(x) \geqslant 0$, 故存在 $y \in (x, \beta)$ 使 $\frac{h(y)-h(x)}{y-x} \geqslant -\varepsilon$,$h(y) - h(x) > -\varepsilon(y - x)$. 结合前述知 $h(y) - h(\alpha) \geqslant -\varepsilon(y - \alpha), y \in E_\varepsilon$ 与 $x = \sup E_\alpha$ 矛盾!
故 $x = \beta, \beta \in E_\varepsilon$, 对任意 $\varepsilon > 0, h(\beta) - h(\alpha) \geqslant -\varepsilon(\beta - \alpha)$, 令 $\varepsilon \to 0$, 则 $h(\beta) - h(\alpha) \geqslant 0$. □

推论 8.3.14. 若 $I \subset$ 是 $\mathbb{R}$ 中的开区间,f'' 在 I 上处处存在, 则 f 是凸函数 $\Longleftrightarrow$ $f'' \geqslant 0$.

第九章 积分

9.1 积分的定义

定义 9.1.1. I 上的一个**分划** (**Partition**),$\sigma = \{(a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n) | a_0 < a_1 < \ldots\cdots < a_n = b, n \in \mathbb{Z}_+\}$, 令 $I_j = [a_{j-1}, a_j]$ 则 $I = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$.
若 σ, σ' 是分划, 称 σ' 是 σ 的**加细** (**retinement**) 若 $\sigma \subset \sigma'$, 记作 $\sigma \prec \sigma'$.

例子. $\{0, 2, 4, 5\} \subset \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

定义 9.1.2. 令 $\mathcal{P}$ 为所有 I 的所有分划, 则 $((P), \subset)$ 是有向集. 定义有向集 $(Q(I)$, 元素 $(\sigma, \xi_0) = (\{a_0 < a_1 \cdots a_n = b\}, (\xi_1, \cdots \xi_n))$. 对任意 $1 \leqslant j \leqslant n$, $\xi_j \in [a_{j-1}, a_j]$. 则称 (σ, ξ_0) 为**带标记点的分划** (**tagged partition**). 且 $(\sigma, \xi_0) \prec (\sigma', xi'_0) \iff \sigma \subset \sigma'$

定义 9.1.3. 已知函数 $f : X \to V$, 定义关于分划 (f, σ, ξ) 的函数

$$S(f, \sigma, \xi) = \sum_{j \geqslant 1} f(\xi_j)(a_j - a_{j-1})$$

称作 Riemann 和. 若 $\lim\limits_{(\sigma,\xi)} S(f, \sigma, \xi)$ 存在, 则记作 $\int_a^b f(x)dx$,f 称为 Riemann 可积的,$\mathcal{R}([a, b], V) = \{f : [a, b] \to V |\ f\text{Riemann可积}\}$.

若 $v \in V$ 满足对任意 $\varepsilon > 0$, 则存在 $\sigma_0 \in \mathcal{P}(I)$, 使得对任意比 σ 更细的分划 $\sigma = \{a_0 < \cdots a_n\}$, 对任意 $\xi_i \in [a_{j-1}, a_j]$, 有

$$\left\| v - \sum_{i \geqslant 1} f(\xi_i)(a_i - a_{i-1}) \right\| < \epsilon$$

其中 $v = \displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f$.

定义 9.1.4. 令 X 是度量空间, $A \subset A \subset X$, A 的直径 $\operatorname{diam}(A) \sup\limits_{x,y \in A} d(x, y) = \sup\limits_{x,y \in A} \|x - y\|$.
若 X 赋范.

我们来研究 f 在 I 上的振幅.

引理 9.1.5. 令 $M = \mathrm{diam}(f(I))$, 对于任意 $(\sigma, \xi_0), (\sigma', \xi_0') \in Q(I)$, 有

$$\|S(f,\sigma,\xi_0) - S(f,\sigma',\xi_0')\| \leqslant M(b-a)$$

证明: 设 $\sigma \cup \sigma' = \{a_0 = a < a_1 \cdots < a_n = b\}$ $S(f,\sigma,\xi_0) = \sum_{i=1}^{n} f(\gamma_i)(a_i - a_{i-1})$ 每一个 γ_i 是 $\xi_1, \cdots$ 中的一个, 取唯一 k 满足 $[a_{i-1}, a_i]$ 落在 σ 的每个小区间内, 则 $\gamma_i = \xi_k$ 类似地, 我们有 $S(f,\sigma,\xi_0') = \sum_{i=1}^{n} f(\gamma')(a_i - a_{i-1})$, $\gamma_1', \cdots \gamma_n'$ 是 $\xi_1' \cdots$ 中的. 于是

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} S(f,\sigma,\xi_0) - S(f,\sigma',\xi_0'')\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|f(\gamma_i) - f(\gamma_i')\| \cdot (a_i - a_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} M(a_i - a_{i-1}) = M(b-a)$$

$\square$

定义 9.1.6. $f: I \to V$ 称为强 Riemann 可积的, 若对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $\sigma = \{a_0 = a_1 < \cdots < a_n\} \in \mathcal{P}(I)$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{diam}(f(I_i))|I_i| \leqslant \varepsilon$.

定理 9.1.7. *函数 $f: I \to V$, 考虑*

(1) $f \in \mathcal{R}(I,V)$;

(2) f 强 Riemann 可积;

则 $(2) \implies (1)$ 且若 $V = \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, 则 $(1) \implies (2)$.

证明: 我们先来证明 $(2) \implies (1)$
我们欲证 $(S(f,\sigma,\xi))_{(\alpha,\xi)\in\mathcal{P}(I)}$ 是 Cauchy 网.
对于任意$\varepsilon > 0$, 我们取 $\sigma \in \mathcal{I}$ 使 $\sum_{j=1}^{n} \mathrm{diam}(f(I_j)|I_j|) \leqslant \varepsilon$,$\sigma$ 把 I 划分为 $I_1 \cup \cdots \cup I_n$, 要证 对于任意$(\sigma', \xi'), (\sigma'', \xi'') \in \mathcal{Q}(I)$, 若 $\sigma', \sigma'' \supset \sigma$, 我们需证

$$\|S(f,\sigma',\xi') - S(f,\sigma'',\xi'')\| \leqslant \varepsilon$$

.

考虑 $S(f,\sigma',\xi')\big|_{I_j} = \sum_{[a_{k-1},a_k]\subset I_j} f(\xi_k)(a_k) - a_{k-1}$. 我们事实上有

$$\left\|S(f,\sigma',\xi')\big|_{I_j} - S(f,\sigma'',\xi'')\big|_{I_j}\right\| \leqslant \mathrm{diam}\ f(I_j) \cdot |I_j|$$

.

于是

$$\|S(f,\sigma',\xi') - S(f,\sigma'',\xi'')\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \mathrm{diam} f(I_j) \cdot |I_j| \leqslant \varepsilon$$

$(1) \longrightarrow (2)$. 不妨设 $V=\mathbb{R}$, 假设 $(S(f,\sigma,\xi_0))_{(\sigma,\xi_0)\in Q(I)}$ 是柯西网. 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $(\sigma,\xi_0)\in Q(I)$, 对于任意 $(\sigma',\xi_0'),(\sigma'',\xi_0'')$ (σ,ξ_0) 有 $\|S(f,\sigma',\xi_0')-S(f,\sigma'',\xi_0'')\|<\varepsilon$
令 $\sigma'=\sigma''=\sigma=\{a_0=a<a_1<\cdots<a_n=b\}$,$I_j=[a_{j-1},a_j]$, $\operatorname{diam}(f(I_j))=\sup f(I_j)-inf f(I_j)]$
取 $\xi_j',\xi_j''\in I$ 满足 $f(\xi_j')\leqslant \inf f'(I_j)+\frac{\varepsilon}{b-a}, f(\xi_k'')\geqslant \sup f(I_j)-\frac{\varepsilon}{b-a}$. 于是

$$\operatorname{diam} f(I_j)-\frac{2\varepsilon}{b-a}\leqslant f(\xi_j'')-f(\xi_j')$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_j \operatorname{diam} f(I_j)\,|I_j| &\leqslant \sum_j (f(\xi_i'')-f(\xi_j''))\\ &\leqslant \sum_j (f(\xi_j'')-f(\xi_j'))\,|I_j|+\sum_j \frac{2\varepsilon}{b-a}\,|I_j|\\ &=S(f,\sigma,\xi_0'')-S(f,\sigma,\xi_0')+2\varepsilon\\ &\leqslant 3\varepsilon\end{aligned}$$

□

注记. 国内很多教科书都是以**步长** (mesh) 来定义的, 而在这个命题中用此种定义并不方便.

定理 9.1.8. 若 $f:I\to V$ 使连续映射, 则 f 强 Riemann 可积.

证明: 因 f 一致连续, 对于 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 对于任意 $x,y\in I$, 有 $|x-y|<\delta$, 有 $\|f(x)-f(y)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}$. 取 $\sigma\in\mathcal{P}(I)$, 使 $|\sigma|=\sigma$ 的步长的最大值小于 δ.
假设 σ 把 I 分成 $I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_n$,$|I_1|,|I_2|,\cdots,|I_n|<\delta$. 于是 diam $f(I_j)\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}$, 故而

$$\sum_j \operatorname{diam} f(I_j)\cdot|I_j|\leqslant\sum_j\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot|I_j|=\varepsilon$$

□

命题 9.1.9. $\mathcal{R}(I,V)$ 是 V^I 上的线性子空间. 且 $\int_a^b:\mathcal{R}(I,V)\to V$ 是线性映射.

证明: $S(c_1f_1+c_2f_2,\sigma,\xi_0)=c_1S(f_1,\sigma,\xi_0)+c_2S(f_2,\sigma,\xi_0)$, 对其两边同时取极限即证. □

命题 9.1.10. 若 $a\leqslant c\leqslant b$, 令 $f:[a,b]\to V$ 是 (强)Riemann 可积的, 当且仅当 $f\big|_{[a,c]}:[a,c]\to V$ 与 $f\big|_{[c,b]}:[c,b]\to V$ 是 (强)Riemann 可积的, 且 $\displaystyle\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$.

证明: 我们事实上只需证明

$$\lim_{(\alpha,\xi)\in\mathcal{Q}(I),(\alpha,\xi)\lesssim\{a,c,b\}} S(f,\sigma,\xi)=\lim_{(\alpha,\xi)\in\mathcal{Q}([a,c])} S(f,\sigma,\xi)+\lim_{(\alpha,\xi)\in\mathcal{Q}([c,b])} S(f,\sigma,\xi)$$

而对于 $\sigma \supset \{a, c, b\}$, 我们有

$$S(f,\sigma,\xi) = S(f,\sigma,\xi)\big|_{[a,c]} + S(f,\sigma,\xi)\big|_{[c,b]},$$

左右同时取极限过程即可. □

注记. 由后续的 Lebesgue 定理: 强黎曼可积的函数几乎处处连续, 则上述命题是显然的推论.

例子. $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b, f \in \mathcal{R}(I,V), g : I \to V$

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & c \leqslant x \leqslant d \\ 0 & \text{其他情形} \end{cases}$$

则 $\int_a^b g = \int_c^d f$.

命题 9.1.11. 若 $f : I \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 是可积的, 若函数 $g : I \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 在有限个点之外与 f 是相同的, 则 $g \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, 且 $\int_I f = \int_I g$.(只需证明 $f\big|_{[a_{i-1},a_i]}$ 和 $g\big|_{[a_{i-1},a_i]}$ 是相等的).

例子. $I_1, I_2 \cdots I_n$ 是 $[a,b]$ 内不相交的区间, 定义

$$\chi_{I_i}(x) = \begin{cases} 1 & x \in I_i \\ 0 & x \notin I_i \end{cases}$$

则 $\displaystyle\int_a^b \chi_{I_i} = |I_i|$.

命题 9.1.12. 若 $f : I \to V$ 是强 Riemann 可积的, 则 $|f| : x \in I \mapsto \|f(x)\|$ 是强 Riemann 可积的, 且 $|\displaystyle\int_a^b f| \leqslant \int_a^b \|f\|$.

证明: 若 $J \subset J, \operatorname{diam}(f(J)) \geqslant \operatorname{diam}(|f|(J))$, 因为 $\|f(x) - f(y)\| \geqslant |\|f(x)\| - \|f(y)\||$, 于是 $\|S(f,\sigma,\xi_0)\| \leqslant S(|f|,\sigma,\xi_0)$, 故 $\|\sum f(\xi_i)|I_j|\| \leqslant \sum \|f(x_j)\||I_j|$. □

例子. $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ 上有 L_1 范数 $\|\cdot\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f|$, 因为 $\displaystyle\int_a^b |f+g| \leqslant \int_a^b |f| + \int_a^b |g|$. $f \in C([a,b],V) \mapsto \int_a^b f$, 有 $\|\int_a^b f\| \leqslant \|f\|_\infty (b-a)$ 是连续映射, 因为当 f_n 一致收敛于 f 时 $\int_a^b f_n$ 收敛于 $\int_a^b f$.

命题 9.1.13. 令 V, V' 为 Banach 空间, $\varphi : V \to V'$ 有界, 且 $f : I \to V$ 可积, 则 $\varphi \circ f : I \to V'$ 可积, 且 $\int_a^b \varphi \circ f = \varphi(\int_a^b f)$.

证明: $S(\varphi \circ f, \sigma, \xi_n) = \varphi(S(f,\sigma,\xi_0))$, 对两边取极限. 由 φ 为有界线性映射故连续, 于是右边极限存在, 故左边极限也存在, 故等式成立. □

例子. 取 $V=\mathbb{R}^N, \varphi_j:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ 为投影映射, 则 $\varphi_j(\int_a^b f)=\int_a^b \varphi_j\circ f=\int_a^b f_j$. 于是 $\int_a^b=(\int f_1,\int f_2,\cdots\int f_N)$.

考虑 $V=C([c,d],W), W$ 是 Banach 空间. $C([a,b],C([c,d],W))=C([a,b]\times[c,d],W)$.

例子. 任意 $y\in[c,d]$, 考虑 $\varphi_y: V=C([c,d],W)\to W$, $\varphi_y(g)=g(y)$ 是有界线性映射. 取 $f\in C([a,b],C([c,d],W))$, 则 $\int\int_a^b f(x,y)dx=\varphi(f(x,\cdot))dx=\varphi(\int_a^b f(x,\cdot)dx)=(\int_a^b f(x,\cdot)dx)(y)$,

例子. 取 $I-[a,b], J=[c,d]$. 考虑 $\varphi=\int_J: C([c,d],V)\to V, g\mapsto \int_c^d g$. 则有 ***Fubini*** *原理:*

$$\int_J\int_I f(x,y)dxdx=\int_J\int_I f(x,y)dydx.$$

定理 9.1.14 (Fubini)**.** 若 V 是 Banach 空间, $I_1,I_2,\cdots I_n$ 是紧空间, $f\in(I_1\times\cdots I_n,V)$, $\Sigma:\{1,2\cdots,n\}\to 1,2\cdots n$ 双射, 则

$$\int_{I_1}\cdots\int_{I_n}dx_1dx_2\cdots dx_n=\int_{I_{\sigma(1)}}\cdots\int_{I_{\sigma(n)}}fdx_{\sigma(1)}\cdots dx_{\sigma(n)}.$$

我们把以上积分叫做 *Riemann*(重) 积分.

命题 9.1.15. 若 $f\in\mathcal{R}(I,V), \|f\|_\infty=\sup_{x\in X}\|f(x)\|<+\infty$

证明: $\|f\|_\infty<+\infty$, 存在 I 中点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 使得 $\|f(x_n)\|\to\infty$, 记 $\lim_{n\to\infty}x_n=p$, 且不妨设 x_n 单调激增. 对于任意 $(\sigma),\xi_0\in Q(I)$, 记 $\sigma=\{a_0=a<\cdots a_N=b\}$. 取 $k\in\{1,2,3\cdots,N\}$, 使得 $p\in(a_{k-1},a_k]$. 因为 $f(x_n)\to\infty$, 故存在 n 使得对于 γ_0 为新的分划, 只在第 k 项与 ξ_0 不同, 为 x_n, 使得 $\|S(f,\sigma,\gamma_0)\|>\|S(f,\sigma,\xi_0)\|+1$, 而这两个都大于等于 $S(f,\sigma,\xi_0)$ 于是 Cauchy 条件不成立. □

命题 9.1.16. 若 $f\in\mathcal{R}(I,V)$, $g\in\mathcal{R}(I,[0,\infty)$, 且对任意 x, 有 $\|f(x)\|\leqslant g(x)$, 则 $\|\int_I f\|\leqslant\int_I g$

推论 9.1.17. $\left\|\int_a^b f\right\|\leqslant\|f\|_\infty(b-a)$, 其中 $g(x)=\|f\|_\infty$.

注记. 这个推论说明积分算子是有界线性映射, 其范数小于等于 $b-a$.

推论 9.1.18 (Lebesgue 控制收敛定理)**.** $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}\subset\mathcal{R}(I,V), f\in\mathcal{R}(I,V), \lim_\alpha\|f_\alpha-f\|_\infty=0$, 则 $\lim_\alpha\int f_\alpha=\int f$.

定理 9.1.19 (微积分基本定理). *$f \in \mathcal{R}(I,V)$, 定义 $F: I \to V, F(x) = \int_a^x f(t)dt$, 则 F 是连续的, 若 f 在 $x \in I$ 处连续, 则 F 在 x 处可导且 $F'(x) = f(x)$, 特别地, 若 $f \in \mathbb{C}(I,V)$, 则 f 有原函数 $F(x)$(即 $F' = f$).*

证明: 若 $h \geqslant 0$, 则 $\|F(x+h) - F(x)\| = \|\displaystyle\int_x^{x+h} F(t)dt\| \leqslant h \cdot \|f\|_\infty$, 故 $\lim\limits_{h\to 0^+} F(x+h) = F(x)$. 当 $h \leqslant 0$ 时, $\displaystyle\int_x^{x+h} F(t)dt = -\int_{x+h}^{x} F(t)dt$. 类似地 $\lim\limits_{h\to 0^-} F(x+h) = \lim\limits_{h\to 0^+} F(x-h) = F(x)$, 若 f 在 x 处连续, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使任意 $0 < h < \delta$, 与任意的 $x' \in (x-h, x+h)$, 有 $\|f(x') - f(x)\| \leqslant \varepsilon$.

$$\|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\| = \|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f - f(x)\| = \frac{1}{h}\|\int_x^{x+h}(f(t) - f(x))dt\| \leqslant \frac{1}{h} \cdot h \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

□

附注. 若没有连续的条件, 比如在 x 处间断的阶梯函数, 容易知道在此处上述论证无法成立.

命题 9.1.20. *因此, 若 $\in C(I,V)$, 则 f 所有原函数形如 $dis \int_a^x f + v_0 (v_0 \in V)$*

证明: 设 $F_1, F_2 : I \to V$, 且 $F_1' = F_2'$, 则有 $(F_1 - F_2)' = 0$, 由之前的命题知 $F_1 - F_2 = v_0$ □

定理 9.1.21 (微积分基本定理 2). *令 $f \in \mathbb{R}(I,V), F \in \mathbb{C}(I,V)$ 且 $F' = f$. 若*

(1) $f \in \mathbb{C}(I,V)$;

(2) V=$\mathbb{R}^n$;

则 $\displaystyle\int_a^b f = F|_a^b = F(b) - F(a)$.

证明: (1)

$$F(x) = \int_a^x f + v_0, \text{则} F(b) - F(a) = (\int_a^b f + v_0) - (\int_a^a + v_0) = \int_a^b f$$

(2) 通过考虑 $\mathbb{R}^n$ 分量, 不妨设 $V = \mathbb{R}$, 令 $A = \displaystyle\int_a^b$, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\sigma = \{a = a_0 < a_1 \cdots a_n = b\}$, 使任意 σ 的标记点 ξ 的标记点 ξ_0, 有 $|A - S(f, \sigma, xi_0)| < \varepsilon$

$$F(b) - F(a) = \sum_i F(a_i) - F(a_{i-1})$$

由拉格朗日中值定理,对于任意i, 存在$\xi_i \in (a_{i-1}, a_i)$ 使

$$F(a_i) - F(a_{i-1}) = F'(\xi_i)(a_i - a_{i-1}) = f'(\xi_i)(a_i - a_{i-1})$$

于是

$$F(b)-F(a)=\sum_i f(\xi_i)(a_i-a_{i-1})=S(f,\sigma,\xi)$$

, 故 $|A-(F(b)-F(a))|<\varepsilon$ 对任意 $\varepsilon>0$ 成立, 故 $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$. □

定理 9.1.22 (分部积分). 若 $f\in C^1(I,V)$, $g\in C^1(I,\mathbb{F})$, $\mathbb{F}=\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$, 则

$$\int_a^b f'g=(fg)\Big|_a^b-\int_a^b fg'$$

证明:

$$(fg)\Big|_a^b=\int_a^b (fg)'=\int_a^b (f'g+fg')$$

□

定理 9.1.23 (Taylor 公式积分余项). 令 $f\in C^n([a,b],V)$, $n\in\mathbb{Z}^+$, 对于任意$x\in[a,b]$, 有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)(0)}}{k!}(x-a)^k+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt$$

证明: 对 n 用归纳法, 当 $n=1$ 时, 由微积分基本定理即可, 假设命题对 n 成立, 我们来证 $n+1$ 的情况,

$$\begin{aligned}
f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k&=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt\\
&=-\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n)}(t)\frac{\partial}{\partial t}(x-t)^n dt\\
&=-\frac{1}{n!}f^{(n)}(t)(x-t)^n|_a^x+\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^r dt\\
&=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x-a)^n+\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^r dt
\end{aligned}$$

□

定理 9.1.24 (变量代换). 令 $\Phi:I=[a,b]\to J=[c,d]$ 严格递增的满射, $\Phi\in C^1(I,\mathbb{R})$, $f\in C(T,V)$, 则 $\displaystyle\int_c^d f=\int_c^d (f\circ\Phi)\cdot\Phi'$

证明: 令 $F(y)=\displaystyle\int_c^y f(t)dt$, 于是

$$G(x)=(F\circ\Phi)(x)=F(\Phi(x))=\int_c^{\Phi(x)} f(t)dt$$

$G'=(F\circ\Phi')\cdot\Phi'=(f\circ\Phi)\Phi'$ 令 $H(x)=\displaystyle\int_a^x (f\circ\Phi)\Phi'=G'$, 则 $H'=\displaystyle\int_a^x (f\circ\Phi)\cdot\Phi'=G'$, 故 $G(a)=F(\Phi(a))=F(\Phi(a))=F(c)=0$, 且 $H(a)=0$, 故 $G=H$. □

定义 9.1.25. 若 $\gamma \in C^1([a,b],V)$, 其**曲线长度**定义为 $l(\gamma)=\displaystyle\int_a^b \|\gamma'(t)dt\|$

命题 9.1.26 (重参数化不改变弧长)**.** 若 $f:[c,d]\to[a,b]$ 是双射且连续可导, 令 $\lambda=\gamma\circ f$, 则 $l(\lambda)=l(\gamma), \lambda:[c,d]\to V$.

证明:

$$l(\lambda)=\int_c^d \|(f\circ g)'\|=\int_c^d \|(\gamma'\circ f)f'\|=\int_c^d \|\gamma'\circ f\|\,|f'|=\int_a^b \|\gamma'\|$$

□

例子. $\frac{\pi}{2}$ 是 $\cos x=0$ 最小正解. 则半圆 $S'_+=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, y\geqslant 0, x^2+y^2=1\}$ 在适当的参数化下, 长度为 π.

证明: $\gamma:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2, \gamma(t)=(\cos t,\sin t)$, 要证明 $\gamma:[0,\pi]\to S'_+$ 是双射.
首先由 $(\cos t)^2+(\sin t)^2=1$, 故 $\|\gamma(t)\|=1$, $\sin[0,\pi]=[0,1]$, 故 $\gamma:[0,\pi]\to S'_+, \cos:[0,\pi]\to[-1,1]$ 为双射, 由 cos 单, 故 γ 单. 对任意 $(x,y)\in S'_+$, $x^2+y^2=1$, 且 $y\leqslant 0$, $x\in[-1,1]$, 由 cos 满, 存在 $t\in[0,\pi]$, 使 $\cos(t)=x$, 于是 $\sin(t)=\sqrt{(1-x^2)}=y$ 于是

$$l(\gamma)=\int_0^\pi \|\gamma'(t)\|=\int_0^\pi 1dt=\pi$$

□

命题 9.1.27. 给予 $\mathbb{C}^n(I,V)$ 范数, 有 $\|f\|_{\mathbb{C}^n}=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty+\cdots+\|f^{(n)}\|_\infty$,$\mathbb{C}^n(I,V)$ 是完备度量空间, 且 $\frac{d}{dx}:\mathbb{C}^n(I,V)\to\mathbb{C}^{n-1}(I,V)$ 有界.

证明: $\frac{d}{dx}$ 的有界性是显然的, 我们证 $\mathbb{C}^n(I,V)$ 是完备的, 我们对 n 归纳, 假设 $n=0$ 时已证, 假设我们现在有 $\mathbb{C}^{n-1}(I,V)$ 是完备的, 我们欲证 $C^n(I,V)$ 是完备的. 取 $C^n(I,V)$ 中柯西列, $\{f_k\}_{l\in\mathbb{Z}^+}$, 于是

$$\begin{aligned}&\lim_{k,l\to\infty}(\|f_k-f_l\|_\infty+\|f_k'-f_l'\|_\infty+\cdots\|f_k^{(n)}-f_l^{(n)}\|_\infty)\\&=0.\end{aligned}$$

于是 f_k' 在 $C^{n-1}(I,V)$ 中是柯西列, 于是收敛到 g. □

例子 (求导和积分的交换性)**.** 令 $J=[c,d]$ 为紧空间, $W=C^1(J,V)$, $f\in C([a,b],W))=C([a,b],C^1([c,d],V))$, 于是

$$f(x,\cdot)\in W, 对于任意x\in[a,b].$$

对于任意x, $f(x,y)$ 关于 y 可导且 $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ 连续。则 对于任意$p\in[a,b]$, 当 x 趋于 p 时,$f(x,\cdot)\to f(p,\cdot)$. 即 $\lim\limits_{x\to p}\|f(x,\cdot)-f(p,\cdot)\|_{C^1}=0$.

$\lim\limits_{x\to p}\|f(x,\cdot)-f(p,\cdot)\|_\infty+\lim\limits_{x\to p}\|\dfrac{\partial}{\partial y}f(p,\cdot)\|_\infty=0$. 于是 $\lim\limits_{x\to p}\|f(x,\cdot)-f(p,\cdot)\|_\infty=0$. 那么 $f\in C([a,b],C([c,d],V))=C([a,b]\times[c,d],V)$. 有 $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y):I\times J\to V$ 是连续映射. 那么 $C(I,C^1(J,V))=\{f:I\times J\to V:f,\frac{\partial}{\partial y}$连续映射$\}$.

命题 9.1.28. 令 $f\in C([a,b],C^1([c,d],V))$, 则 $\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$.

附注. 由于求导也是一种极限的过程, 因此也可以使用积分与极限的交换性证明.

证法 2. 令 $G(y)$ 为 $\displaystyle\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}dx$ 一个原函数 $G(t)=\displaystyle\int_a^t\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}dxdy=\int_a^b\int_t^c\frac{\partial f}{\partial y}dydx=\int_a^b(f(x,t)dx)-\int_a^b f(x,c)dx$.

$$\int_a^b\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=G'(y)=\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b f(x,y)dx.$$

□

命题 9.1.29. 令 $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 为 $C^1(C,V)$ 中的网, 假设 $\lim_\alpha\|f_\alpha-f\|=0$, 且 f'_α 一致收敛, 则 f'_α 一致收敛到 f'.

证法 1. $\lim\limits_\alpha\displaystyle\int_a^x=\int_a^x\lim\limits_\alpha\Longrightarrow$ 求导 $=$ 求导 $\lim\limits_\alpha$. □

证法 2. $(f_{\alpha_{\alpha\in\Lambda}})$ 是 $C^1(I,V)$ 中的柯西网. 故 $\lim\limits_{\alpha,\beta}=\|f_\alpha-f_\beta\|_\infty+\lim\limits_{\alpha,\beta}\left\|f'_\alpha-f'_\beta\right\|=0$, 故 f_α 在 $C^1(I,V)$ 收敛到 g, $g\in C^1(I,V)$, 于是 $f_\alpha\to g$, $f_\alpha\to f$, 故 $f=g$.

□

例子. $(\sum a_nx^n)=\sum(x^b)'$, 令 R 小于收敛半径, 于是 $\sum a_n(x^n)'$ 在 $[-R,R]$ 上一致收敛.

推论 9.1.30. 若 $(f_\alpha)_{\alpha\in I}\subset C^n(I,V)(n\in\mathbb{Z}_+)$, $f\in C(I,V)$, 假设 $\lim_\alpha\|f_\alpha-f\|_\infty=0$. 且 $f'_\alpha,f''_\alpha,\cdots,f_\alpha^{(n)}$ 均一致收敛, 则 $f_\alpha^{(i)}$ 一致收敛到 $f^{(i)}$, 即 $f\in C^n(I,V),\lim\limits_\alpha\|f-f_\alpha\|_{C^n}$.

定理 9.1.31 (求导与求导交换)**.** 令 $I\times J,I=[a,b],J=[c,d]$ 假设 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial x}f$ 在 $I\times J$ 上处处存在, 且 $\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial x}f$ 连续, 则 $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y}f$ 在 $I\times J$ 处处存在, 则 $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y}f=\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial x}f$.

证明: $\partial_1=\frac{\partial}{\partial x},\partial_2=\frac{\partial}{\partial y}$. $F(x,y)=\displaystyle\int_a^x\partial_2\partial_1f(u,y)du$ $\partial_1F(x,y)=\partial_2\partial_1f(x,y)$ $F(x,y)=\partial_2\displaystyle\int_a^x\partial_1f(u,y)du=\partial_2f(x,y)$, 故 $\partial_1\partial_2f=\partial_2\partial_1f$ □

9.2 Riemann 可积的的等价刻画

定义 9.2.1. 若 $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的有界网, 定义上下极限为

$$\limsup_\alpha x_\alpha = \lim_\alpha \sup_{\beta\leqslant\alpha} x_\beta = \inf_\alpha \sup_{\beta\geqslant\alpha} x_\beta$$

$$\liminf_\alpha x_\alpha = \lim_\alpha \inf_{\beta\leqslant\alpha} x_\beta = \sup_\alpha \inf_{\beta\geqslant\alpha} x_\beta$$

且 $\limsup_\alpha x_\alpha \geqslant \liminf_{alpha} x_\alpha$ 以上两者相等等价于 $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 收敛

令 $f : I \to \mathbb{R}, \sigma = \{a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b\} \in \mathcal{P}(I)$. 则令 $M_i = \sup\limits_{x\in[a_{i-1},a_i]} f(x), m_i = \inf\limits_{x\in[a_{i-1},a_i]} f(x)$. 则有 Darboux 上和 $\underline{S}(f,\sigma) = \sum M_i(a_i - a_{i-1}), \overline{S}(f,\sigma) = \sum m_i(a_i - a_{i-1})$.

命题 9.2.2. 对于任意 $(\sigma,\xi_0) \in Q(I)$, 则

$$\overline{S}(f,\sigma) = \sup_{(\sigma',\xi_0')\geqslant(\sigma,\xi_0))} S(f,\sigma',\xi_0').$$

$$\underline{S}(f,\sigma) = \inf_{(\sigma',\xi_0')\geqslant(\sigma,\xi_0))} S(f,\sigma',\xi_0').$$

定理 9.2.3. 令 $f : I \to \mathbb{R}$ 有界, 则对于 $\sigma\sigma \in \mathcal{P}(I)$, 有 $\underline{S}(f,\sigma), \overline{S}$ 关于 σ 递减. 定义:*Darboux* 上积分和下积分为,

$$\overline{\int_a^b} = \inf_{\sigma\in\mathcal{P}(I)\overline{S}(f,\sigma)} = \lim_\sigma \overline{S}(f,\sigma).$$

$$\underline{\int_a^b} = \sup_{\sigma\in\mathcal{P}(I)\overline{S}(f,\sigma)} = \lim_\sigma \overline{S}(f,\sigma).$$

则 $f \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R}) \iff \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$.

附注. 事实上, 我们总有 Riemann 可积等价于 Darboux 可积, 但在无线维情况下 Darboux 强 Riemann 可积是不等价的.

定理 9.2.4 (Lesbegue 定理)**.** 映射 $f : I \to V$ 是强黎曼可积的, 当且仅当 f 有界, (即 $\|f\|_\infty < +\infty$) 且不连续点是零测集.

定义 9.2.5. $\mathcal{R}$ 中子集 E 为零测集, 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\mathbb{R}$ 中 $\mathbb{R}$ 覆盖 $E \subset \cup_{I_i}$ 的可数个闭区间, 满足 $\sum\limits_i |I_i| < \varepsilon$.

附注. 用开区间和闭区间定义没有区别.

命题 9.2.6. 可数个 $\mathbb{R}$ 中的零测集的并还是零测集.

证明: 对于任意 ε, E_n 能被可数个总和小于 $\frac{\varepsilon}{2^n}$ 的区间覆盖. E 能被可数个总长小于 $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\varepsilon}{2^n}\leqslant\varepsilon$ 的区间覆盖. □

例子. $\mathbb{R}$ 中的可数集零测, 例 $\mathbb{Q}$ 零测. 若 $J\subset\mathbb{R}$,f 在 J 上的振幅 $\mathrm{diam}(f(J))=\sup\limits_{x,y\in J} d(f(x),f(y))=\sup f(J)-\inf f(J)$.

定义 9.2.7. 令 X 是拓扑空间, Y 是度量空间, $f:X\to Y$, 对任意 $x\in Y$, 对于 $x\in X$, 定义 f 在 x 上的振幅 $\omega(f,X)=\inf_{U\ x}\ \mathrm{diam}(f(U))$.

命题 9.2.8. $f:X\to Y$ 在 x 处连续 $\iff \omega(f,x)=0$.

附注. 不连续点是零测集 $\iff$ 对于任意$\varepsilon>0,\{x\in X|\omega(f,x)\geqslant\epsilon\}$ 是零测集.

证明: 对于 $\delta>0$, 存在分划 $\sigma=\{a<a_1<\cdots a_n=b\}$. 若 $I_i=[a_i,b_i]$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{diam} f(I_i)|I_i|<\delta\varepsilon$$

令 $K=\{k=1,\cdots n:\mathrm{diam}(f(I_k))\geqslant\varepsilon\}$ 故

$$\sum_{k\in K}\varepsilon|I_k|\leqslant\mathrm{diam}(f(I_k))|I_k|<\delta\epsilon.$$

于是 $\sum\limits_{I_k}|I_k|<\delta$. 有 $\Omega_\epsilon(f)\subset(\cup_{k\in K}I_k)\cup\{a_0,a_1,\cdots,a_n\}$ 是零测集和一些总长度小于 δ 的区间的并. 令 $\delta\to 0$, 则 $\Omega_\epsilon(f)$ 是零测集. □

引理 9.2.9. 对于 $f:X\to Y$,X 是一个拓扑空间,Y 是度量空间, 则 $\Omega_\epsilon(f)$ 是闭集.

证明: 我们只需证 $X\backslash\Omega_\epsilon(f)$ 是开集, 只需其中每个点都要有开邻域. 对于 $x\in X\backslash\Omega_\epsilon(f)$, 有存在 x 的开领域域 U 使 $\mathrm{diam} f(U)<\epsilon$. □

引理 9.2.10. 若 $\varepsilon>0$, 满足 $n\in I$ 有 $\omega(f,x)<\varepsilon$, 则存在 I 的分划 $I=I_1\cup\cdots I_n$, 使得对任意 $1\leqslant i\leqslant n$, 有 $diam(f(I_i))<\varepsilon$, 有 $I_i\subset X\setminus\Omega_\epsilon(f)$, 于是 Ω_ϵ 是开集.

证明: 对于任意 $x\in$, 存在 x 邻域 $U_x\in I$, 使得 $\mathrm{diam}(U_x)<\varepsilon$, 对于 $I=\bigcup\limits_{x\in I}U_x$, 开覆盖有 Lebesgue 数 $\delta>0$. 取分划, 其步长小于 δ. $I=I_1\cup I_2\cdots I_n$, $|I_i|<\varepsilon$, $I_i\subset U_x$, $\mathrm{diam}(f(I_i))<\mathrm{diam}(f(I))<\varepsilon$ □

定理 9.2.11. 若 f 在 I 上不连续点是零测集, 则 f 是可积的.

证明: 对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 因 $\Omega_\varepsilon(f)$ 零测, 它可被可数个总长小于 δ 的开区间覆盖. 又 $\Omega_s(f)$ 是有界闭集, 于是其实紧集. 故 $\Omega_s(f)$ 是有限个总长小于 δ 的闭区间之并的子集. □

9.3 反常积分

定义 9.3.1. 设 I 是至少包含两个点的区间. 令 $a=\inf I$, $b=\sup I(-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty)$ $f\in\mathcal{R}(I,V)$ 的反常积分定义为,

$$\int_I=\lim_{u\to a+,v\to b-}\int_u^v f=\lim_{J\text{是 I 紧子区间}}\int_J f$$

例子. $f:(0,\infty)\to V$, $\int_0^{+\infty}=\lim_{u\to 0+,v\to+\infty}=A$. 即对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $u_0,v_0\in(0,\infty)$, $u\in(0,u_0),v\in(V_0,\infty)$, 则 $\left\|\int_u^v f-A\right\|<\varepsilon$

命题 9.3.2 (Cauchy 条件)**.** 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 U_0,V_0,$U,U'\in(0,U_0),V,V'\in(V_0,\infty)$ 则 $\left\|\int_u^v-\int_{u'}^{v'}\right\|<\varepsilon$

例子. $\int_0^\infty f(x)$ 收敛, 等价于 $\lim_{t\to\infty}\int_0^t f$ 收敛, 且 $\lim_{t\to 0+}\int_t^{+\infty}$ 收敛

例子. $\int_0^1\frac{1}{x}dx=\int_{(0,1]}\frac{1}{x}dx$ 不收敛. 因为 $\lim_{u\to 0}\int_u^1\frac{1}{x}dx=\lim_{u\to 0}\log x\big|_u^1$ 不存在.

例子. 若 $f\in\mathcal{R}([a,b]),V$, 则 $\int_{[a,b]}f=\int_{(a,b)}f$.

证明: f Riemann可积 $\implies M=\|f\|_\infty<+\infty$, 对于任意$\varepsilon>0$, 存在$u,v\in[a,b]$ 使得 $0<u-a<\frac{\epsilon}{2M}$, $0<b-v<\frac{\epsilon}{2M}$, 于是 $\|\int_a^b-\int_u^v f\|\leqslant\|\int_u^a f\|+\|\int_v^b f\|\leqslant M\cdot(u-a)+M\cdot(b-v)<\epsilon$. □

命题 9.3.3. 若 $f\in\mathcal{R}(I,V),g\in\mathcal{R}(I,[0,\infty))$, 满足 $\int_I|f|\leqslant g$, 且 $\int_I g<+\infty$ 则 $\int_I f$ 收敛且 $\|\int_I f\|\leqslant\int_I g$

证明: 直接用 g 控制 f 即可, 即对任意 $\epsilon>0$, 存在$u_0,v_0\in I$, 对于任意$0<u<u'<u_0,v_0<v<v'<+\infty$, $\|\int_u^{u'}g\|<\varepsilon$, $\|\int_{v'}^v g\|<\varepsilon$, 于是 $\int_u^{u'}f\leqslant\int_u^{u'}|f|\leqslant\int_u^{u'}g<\epsilon$, 类似地 $\int_{v'}^v f<\varepsilon$, 于是有 $\int_I f$ 存在且 $\|\int_I f\|\leqslant\int_I g$. □

附注. 若 $f\in\mathcal{R}(I,\mathbb{R}^N)$, 我们说 $\int_I f$ 绝对收敛, 若 $\int_I|f|<+\infty$, 即绝对收敛一定收敛.

例子. 由于

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x})=1<+\infty$$

故 $\int_0^1\frac{e^{ix}}{x^2}$ 收敛.

定理 9.3.4 (Lebesgue 控制收敛定理). 令 $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 是 $C(I,V)$ 中的网, 令 $f\in C(I,V)$. 假设

(1) f_α 在 I 的每个紧子空间上一致收敛到 f(内闭一致收敛)

(2) 存在 $g\in\mathcal{R}(I,[0,+\infty))$ 满足 $\int_I g<\infty$, 且对任意 $\alpha\in\mathcal{A}$, 有 $|f_\alpha|\leqslant g$.

则 $\int_I f$ 收敛且 $\int_I f=\lim\limits_\alpha\int_I f_\alpha$.

证明: 以 $I=[0,\infty)$ 为例, $f(x)=\lim\limits_\alpha f_\alpha(x)\leqslant g(x)$. 于是 $|f|\leqslant g$. 由于 $\int_I g<\infty$, 则 $\int_I f$ 收敛. 任取 $\varepsilon>0$, 存在 $A>O$, 使 $\int_A^{+\infty} g<\varepsilon$, 且 $\left\|\int_A^\infty g\right\|<\varepsilon$, 故 $\left\|\int_A^\infty f_\alpha\right\|<\varepsilon$, 因为 f_α 在 $[0,A]$ 上一致收敛于 f, 故存在 $\beta\in\mathcal{A}$, 对任意 $\alpha\geqslant\beta$, 有 $\left\|\int_0^A f-\int_0^A f_\alpha\right\|<\varepsilon$

$$\left\|\int_0^\infty f-\int_0^\infty f_\alpha\right\|\leqslant\left\|\int_0^\infty f-\int_0^A f\right\|+\left\|\int_0^A f-\int_0^A f_\alpha\right\|+\left\|\int_0^A f_\alpha-\int_0^\infty f_\alpha\right\|<3\varepsilon$$

□

命题 9.3.5. 令 I 为区间, Y 为拓扑空间,$f\in(I\times Y,V)$, 假设存在 $h\in(I,[0,+\infty))$ 满足 $\int_I h<+\infty$, 且 对于任意$x\in I$,对于任意$y\in Y$, 有 $\|f(x,y)\|\leqslant h(x)$, 则函数 $y\in Y\mapsto\int_I f(x,y)dx\in V$ 是连续函数.

证明: 欲证 对于任意$y\in Y$, $(Y_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}\subset Y$, $y_\alpha\to y$ 则 $\lim\limits_\alpha\int_I f(x,y_\alpha)dx=\int_I f(x,y)$, 我们有 $\lim\limits_\alpha f(x,y_\alpha)$ 在 $x\in$ 紧区间$J\subset I$ 上一致收敛到 $f(x,y)$, 又 $\|f(x,y_\alpha)\|\leqslant g(\alpha)$, 由 Lebesgue 控制收敛定理立证. □

命题 9.3.6 (反常积分与求导交换性). 令 I,J 为区间, $f\in(I\times J,V),f=f(x,t)$, 假设 $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ 在 $I\times J$ 上处处存在, 且满足:

1. $\frac{\partial f}{\partial t}\in C(I\times J,V)$
2. 存在 $h\in\mathcal{R}(I,[0,\infty))$ 满足 $\int_I h<\infty$. 且对任意 $x\in I$, 任意 $t\in J$ 有 $\|f(x,t)\|\leqslant h(x)$, 且 $\left\|\dfrac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right\|\leqslant h(x)$

则 $\dfrac{d}{dt}\int_I f(x,t)dx=\int_I\dfrac{\partial}{\partial t}f(x,t)dx$ 在 $t\in J$ 上处处成立.

证明: 方便起见, 假设 $0\in J$, 计算 $t=0$ 两边的取值.

$$左=\lim_{t\to0}\frac{\int_I f(x,t)dx-\int_I f(x,0)}{t}dx=\lim_{t\to0}\int_I\frac{f(x,t)-f(x,0)}{t}dx.$$

令 K 为紧区间, $K \subset I$, 则

$$\left\|\frac{f(x,t)-f(x,0)}{t}-\partial_t f(x,0)\right\|=\frac{1}{t}\left\|\int_0^t (\partial_t f(x,s))-\partial_t f(x,0)ds\right\|$$

而 $\lim\limits_{s\to 0}\sup\limits_{x\in K}\|\partial_t f(x,s)-\partial_t f(x,0)\|=0$, 因为 $\partial_t f\in C(J,C(K,V))$. 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 对任意 $|s|<\delta$, 有 $\sup\limits_{x\in K}\|\partial_t f(x,s)-\partial_t f(x,0)\|<\varepsilon$, 于是

$$\left\|\frac{f(x,t)-f(x,0)}{t}-\partial_t f(x,0)\right\|\leqslant\frac{1}{|t|}\int_0^{|t|}\varepsilon=\varepsilon$$

另外

$$\left\|\frac{f(x,t)-f(x,0)}{t}\right\|=\frac{1}{|t|}\cdot\left\|\int_0^t\partial_t f(x,s)ds\right\|\leqslant\frac{1}{t}t\cdot h(x)=h(x).$$

又

$$\lim_{t\to 0}\int_I\frac{f(x,t)-f(x,0)}{t}dx=\int_I\lim_{t\to 0}\frac{f(x,t)-f(x,0)}{t}dx=\int_J\partial_t f(x,t)dx.$$

于是, 控制收敛准则的条件均成立, 由控制收敛准则, 命题成立. □

例子. 考虑 $F(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx(t\geqslant 0)$.
考虑 $F'(t)$ 在 $t>0$ 的取值, 假设 $t\geqslant\delta>0$, 于是 $|e^{-tx}|<e^{\delta x}$, 于是 $\left|e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant e^{-\delta x}$, 而 $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-\delta x}dx=\frac{1}{\delta}<+\infty$. 故 $\dfrac{\partial}{\partial t}$ 与 $\displaystyle\int_0^{+\infty}dx$ 在 $t>0$ 处可交换. $F'(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}-e^{-tx}\sin xdx=\frac{t\sin x+\cos x}{1+t^2}e^{-tx}\Big|_{x=0}^{+\infty}=-\frac{1}{1+t^2}=(-\arctan t)'$. 故而 $F(t)+\arctan t$ 在 $[0,+\infty)$ 在 $(0,\infty)$ 上导数为 0 且连续, 因此其是常值函数.

$$\lim_{t\to+\infty}F(t)=\lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\lim_{t\to+\infty}e^{-tx}\frac{\sin x}{x}=0.$$

这里极限与积分可交换是因为下述事实:

(1) 对任意紧区间 $[a,b]\subset(0,\infty)$, $\sup\limits_{x\in[a,b]}\left\|e^{-tx}\dfrac{\sin x}{x}\right\|\leqslant e^{-ta}\to 0$

(2) $|e^{-tx}\frac{\sin x}{x}|\leqslant|e^{-tx}|\leqslant e^{-tx}$.

故 $C=\lim\limits_{t\to+\infty}\arctan t=\dfrac{\pi}{2}, F(t)=\dfrac{\pi}{2}-\arctan t$, 于是 $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-tx}\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{2}-\arctan t$, 于是 $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{4}$,

9.4 Weierstrass 多项式逼近与 Tietze 扩张定理

引理 9.4.1. 存在 $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}\subset C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 满足以下条件.

1. Q_n 是多项式;

2. $\int_{-1}^{1} Q_n = 1$;

3. 对于任意$0<\delta<1$, $\lim_{n\to+\infty} Q_n = \lim_{n\to+\infty} \int_\delta^1 Q_n = 0$;

证明: 我们取

$$g_n(t) = (1-x^2)^n, Q_n = \frac{g_n}{\int_{-1}^{1} g_n}$$

满足 (1)(2). 只需证 Q_n 在 $[-1,-\delta]\cup[\delta,1]$ 上一致收敛到 0. 由伯努利不等式, $(1-nx^2) \leqslant (1-x^2)^n$.

于是

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n = 2\int_0^1 (1-x^2)^n dx \geqslant 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-nx^2)dx = \frac{4}{3\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

于是有对 $|x|>\delta$, $Q_n(x) \leqslant \sqrt{n}(1-\delta^2)^n$ 是一致收敛到 0 的. □

附注. 其实积分可以做三角代换后用 Wallis 公式计算.

命题 9.4.2. 令 $f\in C([-1,1],V)$, 则 $\lim_{n\to\infty} Q_n(x)f(x) = f(0)$

证明: 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta\in(0,1]$ 使得对任意 $x\in[-\delta,\delta]$, 有 $\|f(x)-f(0)\|<\varepsilon$. 由 $\int_{-1}^{1} Q_n = 1$, 知:

$$\begin{aligned}\left\|\int_{-1}^{1} Q_n(x)f(x) - f(0)\right\| &= \left\|\int_{-1}^{1} Q_n(x)(f(x)-f(0))\right\| \\ &\leqslant \left\|\int_{[-1,-\delta]\cup[\delta,1]} Q_n(x)(f(x)-f(0))\right\| + \left\|\int_{-\delta}^{\delta} Q_n(x)(f-f(x))\right\|\end{aligned}$$

由 f 连续, $M=\|f-f(t)\|_{\infty,[1,-1]}<+\infty$.
$\int_{-1}^{-\delta} Q_n(x)(f(x)-f(0)) \leqslant M\int_{-1}^{-\delta} Q_n$, 而 $\int_{-1}^{-\delta} Q_n \to 0$, 同理有 $\int_\delta^1 Q_n(x)(f(x)-f(0)) \to$

0, 而 $\int_{-\delta}^{\delta} Q_n(x)(f(x)-f(0)) \leqslant \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} \leqslant \varepsilon$, 于是

$$\limsup_{n\to+\infty}\left\|\int_{-1}^{1} Q_n(x)f(x)-f(0)dx\right\| = \limsup_{n\to+\infty}\left\|\int_{-1}^{1} Q_n(x)(f(x)-f(0))\right\|$$
$$\leqslant \limsup_{n\to+\infty}\left\|\int_{-\delta}^{\delta} Q_n(x)(f(x)-f(0))dx\right\| + \limsup_{n\to+\infty}\left\|\int_{-1}^{-\delta} Q_n(x)(f(x)-f(0))dx\right\|$$
$$+\limsup_{n\to+\infty}\left\|\int_{-\delta}^{\delta} Q_n(x)(f(x)-f(0))dx\right\|$$
$$\leqslant \limsup_{n\to+\infty}\int_{-\delta}^{\delta} Q_n(x)dx\cdot\sup_{x\in[-\delta,\delta]}\|(f(x)-f(0))\| + \limsup_{n\to+\infty}\int_{[-1,-\delta]\cup[\delta,1]} Q_n(x)dx\cdot 2\sup_{x\in[-1,1]}\|f(x)\|$$
$$\leqslant \sup_{x\in[-\delta,\delta]}\|(f(x)-f(0))\| + \limsup_{n\to+\infty}\int_{[-1,-\delta]\cup[\delta,1]} Q_n(x)dx\cdot 2\sup_{x\in[-1,1]}\|f(x)\|$$
$$\leqslant \sup_{x\in[-\delta,\delta]}\|(f(x)-f(0))\|$$

令 $\delta\to 0$, 则 $\limsup_{n\to\infty}\|\int_{-1}^{1} Q_n(x)f(x)dx - f(0)\| = 0$. □

定义 9.4.3. 若 X 拓扑空间, $f: X\to V$, 令 $\mathrm{supp}(f)=\{x\in X, f(x)\neq 0\}$, $C_c(x)=\{f\in C(X,V), \mathrm{supp}(f)$是紧集$\}$

定理 9.4.4 (Weierstrass 逼近定理). 令 $V[x]=\{$以 V 中元素为系数的多项式$\}$，任取闭区间 $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$, 则 $V[x]$ 在 $C(I,V)$ 以及 l^∞ 范数下稠密.

证明: 因为 $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$ 与 I 线性同胚，于是不妨假设 $I=[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$, 对任意 $f\in C(I,V)$, 把 f 延拓成连续映射 $f:\mathbb{R}\to V$, $\mathrm{supp}(f)\subset[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$. 令 $F: I\times[-1,1]\to V, F(x,y)=f(x-y)$. 于是 $F\in C([-1,1],C(I,V)), \lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} Q_n(y)F(\cdot,y)dy = F(\cdot 0)=f$, 即 $\limsup_{n\to\infty}\sup_{x\in I}\left\|\int_{-1}^{1} Q_n(y)F(x,y)dy - f(x)\right\|$. f 在 I 上被 $\int_{-1}^{1} Q_n(y)f(x-y)$ 一致逼近, 只需证 $\int_{-1}^{1} Q_n(y)f(x-y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} Q_n(y)f(x-y)dy$ 是多项式. 而 $\int_{-\infty}^{+\infty}(x-u)^k f(u)\subset V[x]$, 于是 $\int_{-\infty}^{+\infty} Q_n(x)f(x-y)dy\in V[x]$. □

推论 9.4.5. 对于任意 $N\in\mathbb{Z}$, 令 $I_1,I_2,\cdots I_N$ 为紧区间, 则 $V[x_1,\cdots x_N]$, 在 $C(I_1\times I_n,V)$ 和 l^∞ 范数下稠密.

证明: 将多项式 $f(x_1,x_2\cdots x_n)$ 看成 $f(x_1\cdots x_{n-1})(x_n)$，由一元的情形以及归纳法得证. □

定义 9.4.6. 拓扑空间是正规的，若存在开集分离其中任意不相交闭集，等价地，对于任意开集 E，和开集 W, 存在开集 U 使得有 $E\subset U\subset\overline{U}\subset W$.

引理 9.4.7 (Urosohn 引理). *令 X 为拓扑空间，则以下等价：*

1. *X 正规*

2. *对于 X 的任意不交闭集，A,B，存在 $f\in C(X,[0,1])$，满足 $f|_A=0, f|_B=1$. f 称为 A 和 B 的 Urosohn 函数.*

证明: (2) $\Longrightarrow$ (1) 是显然的，只需证 (1) $\Longrightarrow$ (2).
假设 X 是正规的, 对于两个闭集 A 与 B, $A\cup B=\varnothing$. 我们来递归的构造满足要求的连续函数. 定义 $f_0: X\to[0.1], f_0|_B=1, f_0|_{X\setminus B}=0$. 由于存在 $B\subset U_{\frac{1}{2}}\subset\overline{U_{\frac{1}{2}}}\subset X\setminus A$. 我们有

$$h_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ x\in U_{\frac{1}{2}}\\ 0\ x\in X\setminus U_{\frac{1}{2}}\end{cases}$$

令 $f_{\frac{1}{2}}=f_0+h_1$. 令 $U_1=X\setminus A$, 假设 step n 中, 我们有

$$B\subset U_{\frac{1}{2^n}}\subset\overline{U_{\frac{1}{2^n}}}\subset U_{\frac{2}{2^n}}\subset\cdots U_{\frac{2^n-1}{2^n}}\subset\overline{U_{\frac{2^n-1}{2^n}}}\subset U_1=X\setminus A$$

而在 step n+1 中, 由正规空间的等价性质, 存在开集 $U_{\frac{i}{2^{n+1}}}$, 使得

$$U_{\frac{i-1}{2^{n+1}}}\subset\overline{U_{\frac{i-1}{2^{n+1}}}}\subset U_{\frac{i}{2^n}}\subset\overline{U_{\frac{i}{2^n}}}\subset U_{\frac{i+1}{2^{n+1}}}$$

于是我们有

$$B\subset U_{\frac{1}{2^{n+1}}}\subset U_{\frac{2}{2^{n+1}}}\subset\cdots\subset U_1=X\setminus A.$$

令 $h_{n+1}\in[0,1]^X$ 为

$$h_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x\in U_{\frac{1}{2^{n+1}}}\setminus U_{\frac{j-1}{2^{n+1}}}\\ 0 & 其他\end{cases}.$$

$\overline{U_{\frac{1}{2^k}}}\subset U_{\frac{1}{2^{k+1}}},\overline{U_{\frac{1}{2^k}}}\subset U_{\frac{1}{2^k}}$. 令 $f_{n+1}=f_n(x)+h_n(x)$ 由此可知, 对任意 $x\in X$, $w(f_n,x)\leqslant\frac{1}{2^n}$, 故 $\{f_n\}_{n\in Z_+}$ 是无穷范数下的柯西列, 一致收敛到 f. 对任意 $x\in X$, 有 $w(f,x)=0$, 于是 f 连续. 故我们找到了符合要求的函数. □

引理 9.4.8. *令 X 为局部紧空间，A 和 B 是 X 的不相交子集，A 是紧集，B 是闭集，则存在预紧开集 $U\supset A$, 开集 $V\supset B$, 使得 $U\cap V\neq\varnothing$. 等价地，对于紧集 A,$A\subset W$ 开集，则存在预紧开集 U, 使得 $A\subset U\subset\overline{U}\subset W$.*

引理 9.4.9 (局部紧空间 Urysohn 引理). *令 X 为局部紧空间，A 和 B 为 X 不相交子集，A 是紧集，B 是闭集，则存在连续函数 f, 使得 $f|_A=1$, $\mathrm{supp}f\in X\setminus B$ 且 f 有紧支集.*

定理 9.4.10 (单位分解定理). 令 X 为局部紧空间, K 是紧子集, $\mathfrak{U}=\{U_1,\cdots U_n\}$ 是 K 的一个有限开覆盖, 则存在 $h_1,\cdots h_n\in C_c(X,[0,1])$ 满足:

1. 对于任意x, $\operatorname{supp} b_i\subset U_i$
2. 对于任意$x\in K$, $\sum\limits_{i=1}^n b_i(x)=1$
3. 对于任意$x\in X$, $\sum\limits_{i=1}^n b_i(x)\in[0,1]$

这样的 $h_1,\cdots h_n$ 被称为 K 在 U 下的一个单位分解.

证明: 对于任意$x\in K$, 存在U_i, $x\in U_i$, 且 $\operatorname{diam}U_i<\varepsilon$ 取 $g_x\in C_C(X,[0,1])$, $g_x(x)=1$ 且 $\operatorname{supp}(g_x)\subset U_i$. 由 K 紧, $K\subset\bigcup\limits_{x\in K}g_x^{-1}[0,\infty)$, 故存在有限个开集覆盖 K, 设这有限个开集对应的单点集为 $E=\{x_1,\cdots x_n\}$, 令 $G_i=\sum\limits_{\operatorname{supp}g_i\subset U_i}g_{x_i}$, 故 $\sum\limits_{i=1}^n G_i$ 在 K 上大于 0. 令 $h_i=\dfrac{G_i}{F+\sum_{i=1}^n G_i}$, $F\in C(X,[0,1])$, $F|_K=0$, 在其他地方大于 0, 这由 Urysohn 引理保证. □

定理 9.4.11 (Tieze 扩张引理). 令 X 为局部紧空间, K 是 X 紧子集, 令 $f\in C(X,V)$, 则存在 $\tilde{f}\in C(K,V)$, 满足 $\tilde{f}|_K=f$, 且 $\|\tilde{f}\|_{X,\infty}=\|f\|_{K,\infty}$

证明: 令 $M=\|f\|_{k,\infty}$, 不妨假设 $M>0$. step1:
对于任意$\varepsilon>0$, 存在$g\in C_C(X,V)$, 满足 $\|g\|_{X,\infty}\leqslant M$, 且 $\|g-f\|_{K,\infty}\leqslant\varepsilon$ $\operatorname{supp}f\subset W$.
我们如下证明这个事实:
对于任意$p\in K$, 存在p 的邻域 $U_p\in X$, 满足 $\operatorname{diam}U_p\leqslant\varepsilon$, 并且有 $K\subset\bigcup\limits_{p\in I}U_p$, 其中 $I\subset K$ 且 I 是有限集, 并且配备了 $\{U_p\}$ 的单位分解 $\{h_p\}$. 令 $g(x)=\sum\limits_{p\in I}h_p(x)f(p)$. 于是 $\|g(x)\|_\infty\leqslant M\cdot\sum\limits_{p\in E}h_p(x)\leqslant M$, 故 $\|g\|_{X,\infty}\leqslant M$, 且 $\|g(x)-f(x)\|=\|\sum\limits_{p\in E}h_p(x)\cdot(f(p)-f(x))\|\leqslant\varepsilon$.
Step2:
取 $g_i\in C_c(X,V)$, 满足 $\|f-g_i\|_{K,\infty}\leqslant\frac{1}{2^i}M$, 故 $\hat{f}=\sum\limits_{n=1}^\infty g_n$ 一致收敛, 且 $\hat{f}|_K=f$. 又由 Urysohn 引理, 存在 $\phi\in C_c(X,[0,1])$ 满足 $\phi|_K=1$, 通过把 $\hat{f}$ 换为 $\hat{f}\phi$, 我们不妨假设 $\hat{f}$ 也有紧支集.
Step3:
令 $g(x)=\max\{M,\|\hat{f}(x)\|\}$, 令 $\tilde{f}=\frac{M}{g}\hat{f}$, 则 $\tilde{f}$ 即为我们需要的扩张函数.

□

定理 9.4.12. 令 X 为紧 Hausdorff 拓扑空间, 则 $V\subset C(X,\mathbb{R})$ 在 $C(X,V)$ 中 (l^∞) 稠密, 即 对于任意$f\in c(X,V)$, 对于任意$\epsilon>0$, 存在$v_1,\cdots,v_n\in V$, 存在$h_1,\cdots,h_n\in C(X,\mathbb{R})$ 使 $\|f-\sum\limits_i h_iv_i\|_\infty<\epsilon$.

推论 9.4.13. 令 X, Y 为紧 Hausdorff 空间, 且包含 $\mathbb{R}$, 则 $C(X,\mathbb{R}) \otimes C(Y,\mathbb{R}) \subset C(X \otimes Y, \mathbb{R})$

推论 9.4.14. 令 X 为 $\mathbb{R}^V$ 的紧子集, 则 $V[x_1, \cdots, x_v]$ 在 $C(X,V)$ 中稠密.

证明: $X = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ 时已证.
而一般的,$X \subset I_1 \times \cdots \times I_N$,对于任意$f \in C(X,V)$,存在 延拓 $\tilde{f} \in C(I_1 \times \cdots \times I_v, V)$ 被多项式逼近. □

9.5 Stone-Weierstrass 定理与 Tychonoff 定理

以下令 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$或$\mathbb{C}$, X 为 Hausdorff 空间.

定义 9.5.1. X 为一个拓扑空间, $\mathcal{E} \subset C(X,\mathbb{F})$, 称 ϵ **分离 X(seperates points)** 的点, 若 对于任意$x, y \in X$, $x \neq y$, 存在 $f \in \mathcal{E}$ 使 $f(x) \neq f(y)$.

定义 9.5.2. $\mathcal{A} \subset C(X,\mathbb{F})$ 称为 $C(X,\mathbb{F})$ 的 $\mathbb{F}-$ **子代数**, 若 $\mathcal{A}$ 是 $C(X,E)$ 的 $\mathbb{F}-$ 子空间, 且对乘法封闭. 称 $\mathcal{A}$ 为 **含幺子代数 (unital subalgebra)**, 若 $\mathcal{A}$ 是子代数且 $1 \in \mathcal{A}$. 若 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, 称 $\mathcal{A}$ 是**自伴子代数**或 **$*$-子代数**, 若 $f \in \mathcal{A} \iff f^* \in \mathcal{A}$. 这里 $f^*(x) = \overline{f}(x) = \overline{f(x)}$, 且称 $*$ 为一个**对合 involution**.

注记. 代数忘记其上的乘法就是线性代数中学过的模.

定义 9.5.3. 若 $\mathcal{E} \subset C(X,F)$, 则包含 $\mathcal{E}$ 的最小子代数或最小含幺子代数称为由 $\mathcal{E}$ 生成的子代数或含幺子代数.

例子. 若 $\mathcal{E} \subset C(X,\mathbb{F})$, 则 $\mathcal{E}$ 生成的含幺子代数为 $\mathbb{F}[\mathcal{E}] = \{\mathcal{E}\text{中的元素构成的多项式}\}$, 特别地, 我们有 $\{f_1, f_2 \cdots f_n\}$ 生成的含幺子代数为 $\mathbb{F}[f_1, f_2 \cdots f_n]$, 生成的含幺 $*-$ 子代数为 $\mathbb{C}[f_1, f_1^*, \cdots f_n, f_n^*]$.

附注. $\mathcal{E}$ 分离 X 中的点 $\iff$ $\mathcal{E}$ 生成的子代数分离 X 中的点.

定理 9.5.4 (Stone-Weierstrass 定理 ($C(X,\mathbb{R})$ 版本))**.** *令 X 为紧 Hausdorff 空间, $\mathcal{A} \subset C(X,\mathbb{R})$ 是含幺子代数, 假设 $\mathcal{A}$ 分离 X 的点, 则 $\mathcal{R}$ 在 $C(X,\mathbb{R})$ 中稠密.(以下稠密皆是在 l^∞ 下考虑)*

则我们立即有以下复值函数的形式.

定理 9.5.5 (Stone-Weierstrass 定理 ($C(X,\mathbb{C})$ 版本))**.** *令 X 为紧 Hausdorff 空间, $\mathcal{A} \subset C(X,\mathbb{C})$ 是含幺 $*$ 子代数, 假设 $\mathcal{A}$ 分离 X 的点, 则 $\mathcal{A}$ 在 $C(X,\mathbb{C})$ 中稠密.*

证明: 令 $\mathrm{Re}\mathcal{A}=\{\mathrm{Re}f=\frac{f+\bar{f}}{2},f\in\mathcal{A}\}$. 令 $f=\mathrm{Re}f+i\ \mathrm{Im}f$, $\mathrm{Re}\mathcal{A}\subset\mathcal{A}$. 于是 $\mathrm{Re}\mathcal{A}$ 是 $C(X,\mathbb{R})$ 的含幺子代数, 且 Re 可以分离 X 中的点 (对于两个给定的点 x,y, 设 f 分离它们, 则 $\mathrm{Re}f$与$\mathrm{Im}f$ 中至少有一个分离 x,y, 而 $\mathrm{Re}f,i\mathrm{Im}f\subset\mathrm{Re}\mathcal{A}$, 于是 $\mathcal{A}$ 分离 x,y). 由实值 SW 定理,$\mathrm{Re}\mathcal{A}$ 在 $C(X,\mathbb{R})$ 中稠密, 于是 $\mathcal{A}=\mathrm{Re}\mathcal{A}+i\ \mathrm{Im}\mathcal{A}$ 在 $C(X,\mathbb{C})$ 中稠密. □

例子. 对于任意 $n\in\mathbb{Z}$, 令 $e^n:S^1\to\mathbb{C}$ 为 $e_n(e^{ix})=e^{inx}$, 则 $\mathbb{C}[e_1,e^{-1}]$ 是 $C(S^1,\mathbb{C})$ 的含幺 $*-$ 子代数且分离 S^1 的点, 故 $\mathbb{C}[e_1,e^{-1}]$ 在 $C(S^1,\mathbb{C})$ 上稠密. 然而 $C[e_1]=\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots\}$, 不是 $*$ 子代数, 故其在 $C(S^1,\mathbb{C})$ 上不稠密.
事实上 e_{-1} 就不在上述集合的闭包中. 这是由于以下的积分式:

$$\int_0^{2\pi}e^{ix}\cdot e^{-ix}=2\pi.$$

因此存在 $f(e^{ix})$, 使得:

$$\int_0^{2\pi}e^{ix}f(e^{ix})\neq 0$$

可是对于 $n\leq 0$, 我们有:

$$\int_0^{2\pi}e^{ix}e_n(e^{ix})=0$$

这就产生了矛盾.

下面我们来证明实值的 Stone-Weierstrass 定理.

证明: 我们先证明 $\mathcal{A}$ 有限生成的情况, 则可设生成元 $f_1,\cdots,\ f_n$ 分离 X 中的点, (因为 $f_1,\cdots,f_n$ 生成 $\mathcal{A}$ 且分离 X 中的点).
定义连续函数 (类似期中考试最后一题) $\Phi:X\to\mathbb{R}^N$, $\Phi(X)=(f_1(x),\cdots,f_n(x))$, 因为 $f_1,\cdots,f_n$ 分离 X, 且 X 是紧的 Hausdorff 空间, 于是 Φ 是一个同胚映射,$X\cong\Phi(X)$, 而在 $C(\Phi(X),\mathbb{R})$ 中我们有连续函数被 $x_1,\cdots,x_n$ 的多项式一致逼近，再利用 Φ 把这些多项式拉回到 $C(X,\mathbb{R})$ 上即可.
我们下面来证明 $\mathcal{A}$ 不是有限生成的请况:
设 $\{f_\alpha|\alpha\in\mathcal{A}\}$ 是一个分离 X 的含幺子代数, 定义 $\Phi:X\to S=\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}}I_\alpha$, 其中 I_α 是包含紧集 $f_\alpha(X)$ 的紧空间. 由 Tieze 扩张引理, 我们只需对紧空间的乘积空间讨论. 我们仍然有映射 $\Phi:X\to\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$, 首先由 Tychonoff 定理, $\prod\limits_{\alpha}I_\alpha$ 是紧集, 且对于每一个有限集 $A\subset\mathcal{A}$, 我们有 $\prod\limits_{\alpha\in A}I_\alpha$ 上的连续函数可以被多项式一致逼近, 于是我们只需证明如下断言:
可以用建立在有限个分量上的函数逼近已知得 $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}}I_\alpha$ 中的连续函数.
我们先对可数的情形进行分析, 由此来给一般的情形提供思路. 设 $\mathcal{A}=\mathbb{N}$, 设 ϕ_n :

$\prod_{i\in\mathbb{N}} I_i \to \prod_{i=1}^{+\infty} I_i$ 为限制映射, 即 $\phi_n(x_1, x_2\cdots) = (x_1, x_2, \cdots x_n, y_{n+1}, \cdots) \in \prod_{i=1}^{n} I_i$(其中 y_n 已事先取定, 在 I_n 中.) 我们下面来证明这个事实. 证明的思路是采用逐点连续与等度连续推出一致收敛. 首先我们有 $f_n = \Phi_n \circ f(x)$ 关于 n 逐点收敛到 $f(x)$, 这是由于可数个度量空间构成的乘积拓扑是完备的. 而等度连续的条件也是不难的, 我们留作作业, 这与有限维的空间中的连续函数总能被多项式一致逼近基本一致.
而当 $\mathcal{A}$ 不可数时, 对于一般的函数 $f(x_\alpha)$, 我们只需证明 $\lim_{A\in\text{fin}(2^{\mathcal{A}})} f_A(x_\alpha) = f$, 其中 $f_A = f \circ \pi_A$, 而 π_A 是除分量 A 上的, 其它 $\mathcal{A} \setminus A$ 中的分量均被映到 0(或者随便取定的一个拓扑空间中的数 c_α) 的映射, 欲证这样的一致收敛关系, 我们只需证明 $\{f_A\}_{A\in\text{fin}(2^{\mathcal{A}})}$ 是基本逐点等度连续的, 即 对于任意$(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, 存在它的一个邻域 U, 与 $B \in \text{fin}(2^{\mathcal{A}})$, 使得 对于任意$B' \in \text{fin}(2^{\mathcal{A}})$ 若 $B' \supset B$ 则 $\text{diam}(f_{B'})(U) < \epsilon$.
这是因为对于给定的 $\epsilon > 0$, 存在 x 的邻域 U, 使得 对于任意$y \in U$, $|f(y) - f(x)| < \epsilon$. 由于乘积拓扑空间有拓扑基 $\{\prod_\alpha U_\alpha | \text{存在} B \in \text{fin}(2^{\mathcal{A}}), \text{对于任意}\alpha \in \mathcal{A} \setminus B, U_\alpha = I_\alpha\}$, 于是我们可以不妨设 $U = \prod_\alpha U_\alpha$, 且 存在$B \in \text{fin}(2^{\mathcal{A}})$, 使得 对于任意$\alpha \in \mathcal{A} \setminus B$, $U_\alpha = I_\alpha$. 于是 对于任意$B' \supset B$, 以及 $y \in U$, 有 $y_\alpha \in U_\alpha$, 且 $\pi_B(y)$ 在 B' 中的分量 $\alpha \in B'$ 为 $y_\alpha \in U_\alpha(y \in U)$, 而在 $\mathcal{A} \setminus B' \subset \mathcal{A} \setminus B$ 中的分量 β 上, $\pi_B(y)_\beta$ 为 $c_\beta \in I_\beta = U_\beta$, 于是 $\pi_B(y) \in U$, 故而 $f'_B = f \circ \pi_{B'}(y) = f(\pi_{B'}(y))$ 在 $B_{\mathbb{R}}(f(x), \epsilon)$ 内, 那么 $f'_B(U) \subset B_{\mathbb{R}(f(x)),\epsilon}$ 从而 $\{f_A\}_{A\in\text{fin}(2^{\mathcal{A}})}$ 是一个弱等度连续网. □

命题 9.5.6. *令 S 为拓扑空间,V 为 Banach 空间, 则 $\{f_i\}_{i\in I}$ 是 V^S 中的函数网, 且逐点收敛到 $f \in C(S, V)$, 假设 S 是紧空间, 则下列命题等价:*

(1) $\lim_i \|f_i - f\|_\infty = 0$;

(2) 对于任意$\epsilon > 0$, 对任意 $x \in S$,, 存在 x 的邻域 U, 及指标 i, 使得对任意 $j > i$, $\text{diam} f(U) < \epsilon$.

附注. 这个命题的证法与之前更强的等度连续的条件是一样的, 在之前的证法中并没有用到等度连续所有的性质.

在证明 Tychonoff 定理之前, 我们先回忆一下在上次作业中学习的 Zorn 引理.

引理 9.5.7 (Zorn 引理)**.** *对于非空偏序集，若其每个全序子集都有上界，则此偏序集存在极大元.*

定理 9.5.8 (Tychonoff 定理)**.** *若 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 为一族紧拓扑空间的乘积, 则 $S = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 是紧的拓扑空间.*

证明: 我们先对可数的情形进行证明, 这里我们采用著名的对角线方法. 当 $S = \prod_{n\in\mathbb{Z}_+} X_n$, 其中每个 X_i 是度量空间时, 我们有 S 上也可定义乘积度量 (参考第二次作业), 这个度

量下点列收敛恰等价于每一个分量下的点列收敛, 由于之前证明了度量空间下紧与列紧等价, 于是欲证 S 是紧的, 只需证明 S 是列紧的.
给定 S 中的一个序列 $(x_1(1), x_1(2), \cdots), (x_2(1), x_2(2), \cdots), \cdots$, 其中 $x_i(n)$ 代表了第 i 项的第 n 个分量, 由 X_i 的紧性, 我们知道第一列 $(x_1(1), x_2(1), \cdots)$ 在 X_1 中有收敛子列, 设为 $(x_{i_{1,1}}(1), x_{i_{1,2}}(1), \cdots)$, 设它们收敛到 $x(1)$, 而后 $(x_{i_{1,1}}(2), x_{i_{1,2}}(2), \cdots)$ 在 X_2 有收敛子列, 设为 $(x_{i_{2,1}}(2), x_{i_{2,2}}(2), \cdots)$, (注意这里我们取的指标是收敛到 $x(1)$ 的序列的指标的子指标) 设它们收敛到 $x(2)$, 如此反复,

$$(x_{i_{n,1}}(n), x_{i_{n,2}}(n), \cdots)$$

收敛到 $x(n)$, 再设 $(x_{i_{n,1}}(n+1), x_{i_{n,2}}(n+1), \cdots)$ 有子列 $(x_{i_{n+1,1}}(n+1), x_{i_{n+1,2}}(n+1), \cdots)$ 收敛到 $x(n+1)$, 则我们有" 对角线" $(x_{i_{1,1}}(1), x_{i_{1,1}}(2), \cdots)$,$(x_{i_{2,2}}(1), x_{i_{2,2}}(2), \cdots)$,$\cdots$,$(x_{i_{n,n}}(1), x_{i_{n,n}}(2), \cdots)$,
收敛于 $(x(1), x(2), \cdots)$.

附注. 以上的证明对不可数的情形几乎没有帮助, 只是为了让大家熟悉对角线法在可数情形下的使用. 另外实数集不可数也可以用对角线法证明.

对于一般的乘积拓扑, 我们来证明其上的网有收敛子网.
首先, 我们有以下两个命题等价:

(1) β 是网的聚点 (x 为 $\{x_\alpha\}$ 的聚点当且仅当任意 x 邻域 U, 及任意 β, 存在 $\alpha > \beta$ 使得 $x_\alpha \in U$

(2) 网有子网收敛到 β.

附注. 事实上, 我们有以下两个命题等价:

(1) X 紧;

(2) X 有收敛子网;

(3) X 有聚点;

则我们只需证明 S 中的网有聚点, 我们有这个网的各个分量组成的网都有子网, 我们利用 Zorn's Lemma.
考虑 $S = \prod\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$, X_α 是紧的, 我们将 S 中的元素看成一个个函数 $f : \mathcal{A} \to \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$. 令 $\{f_i\}_{i \in I}$ 为 S 中的网, 我们证明 $(f_i)_{i \in I}$ 有收敛子网, 即只需证明有聚点.
对于任意$\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, 我们可以把 f 限制在 B 上成为乘积空间 $\prod\limits_{\beta \in \mathcal{B}} X_\beta$ 中的函数.
定义偏序集 $\Gamma = \{(B, g) |\ \mathcal{B} \subset \mathcal{A}, g \in \prod\limits_{\beta \in \mathcal{B}} X_\beta \text{且} g \text{为网} \{f_i|_{\mathcal{B}}\}_{i \in I}\}$的聚点. 其上的偏序 $(\mathcal{B}, g) \leqslant (\mathcal{B}', g')$ 定义为 $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ 且 $g'|_{\mathcal{B}} = g$.

考虑单元集 $\mathcal{B}$, 由每个 X_α 都是紧的, 容易得到 Γ 非空.
我们下面来验证 zorn 引理的条件.
对于 Γ 中的全序子集 Λ, 令 $\widetilde{\mathcal{B}} = \bigcup_{(\mathcal{B},g)\in\Lambda} \mathcal{B}$, 而 $\widetilde{g} : \mathcal{B} \to \cup_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ 为 $\}(\beta) = g(\beta)$, 对于任意$(\mathcal{B}, g) \in \Lambda, \beta \in \mathcal{B}$, 这样的 $\widetilde{g}$ 是良好定义的, 因为 Λ 是全序集, 于是其上的 g 两两相容.
不难验证却有 $(\widetilde{B}, \widetilde{g}) \in \Gamma$, 于是 Γ 中任意全序子集有上界. 由 zorn 引理, 其中有极大元, 设为 $(\mathcal{B}, g)$, 则只需证 $\mathcal{B} = \mathcal{A}$, 则 g 是 $\{f_i\}_{i\in I}$ 的聚点. 如果 $\mathcal{B} \neq \mathcal{A}$, 则可以取 $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$. 首先取 $\{f_i\}_{i\in I}$ 的子网 $\{f_{i_j}\}$ 使得 $f_{i_j}|_{\mathcal{B}}$ 逐点收敛到 g, 又因为 X_α 是紧的,$f_{i_j}(\alpha)$ 又有子网收敛到某个元素 x_α, 定义 $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \bigcup \{x_\alpha\}$ 上的函数 $\widetilde{g}|_{\mathcal{B}} = g$, 而 $\widetilde{g}(\alpha) = x_\alpha$, 于是 $\widetilde{g}$ 为 $\{f_i|_{\widetilde{\mathcal{B}}}\}$ 的聚点. 那么 $(\widetilde{\mathcal{B}}, \widetilde{g}) \in \Gamma$ 与 $(\mathcal{B}, g)$ 是极大元矛盾, 于是必有 $\mathcal{B} = \mathcal{A}$, 即 g 为 $\{f_i\}$ 聚点.
至此, 我们有乘积空间 S 中任意网有聚点, 即 S 是紧的. □

推论 9.5.9. *令 X 为拓扑空间, 则 X 是紧的 Hausdorff 拓扑空间当且仅当其可以被同胚嵌入为 $S = [0,1]^{\mathcal{A}}$ 的紧子集.*

证明: 显然我们只需证 X 是紧 Hausdorff 的情况.
将 $C(X, \mathbb{R})$ 中的函数记为 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, 由 X 紧, 故而对每一个 α 可以找到 A_α 使得 $\|f_\alpha\| \leqslant A_\alpha$. 令 $g_\alpha = \frac{f_\alpha}{g_\alpha}$, 我们构造函数 $\Phi : X \to [-1,1]^{\mathcal{A}}$, 其中 $\Phi(x)$ 的第 α 分量为 g_α, 由 X 是紧的 Hausdorff 空间, 总可以有 X 上的函数分离 X 中给定的两个点, 从而 Φ 是 X 与 $\Phi(X) \subset [-1,1]^{\mathcal{A}}$ 之间的同胚. □

至此, 我们完成了紧拓扑空间上的 Stone-Weierstrass 定理的证明, 我们下面给出局部紧拓扑空间上的 Stone-Weierstrass 定理.

定义 9.5.10. 令 X 为局部紧拓扑空间, V 为 Banach 空间, $f \in C(X, V)$. 若 $v \in V$, 我们称 $\lim_{x\to\infty} = v$, 若 对于任意$\epsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset X$ 使得 对于任意$x \in X \setminus K$, 有 $\|f(x) - v\| < \epsilon$, 此时亦一定有 f 有界, 令 $C_0(X, V) = \{f \in C(X, V) | \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\}$, 则 $\|\cdot\|_\infty$ 是 $C_0(X, V)$ 上的一个范数.

附注. 若 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 我们称 f 在无穷远处消失.

我们有如下完备性:

命题 9.5.11. *$C_0(X, V)$ 在 l^∞ 范数下完备, 因此是 Banach 空间.*

命题 9.5.12. *令 Y 为紧 Hausdorff 空间, E 为 Y 的闭子集, $X = Y \setminus E$ 是局部紧拓扑空间, 则 $C_0(X, V) = \{f \in C(Y, V) | \ f|_E = 0\}$, 即所有在 Y 上连续但在 E 处消失的函数.*

定理 9.5.13 (局部紧空间的 Stone-Weierstrass 定理)**.** *令 $\mathcal{A}$ 为 $C_0(X, \mathbb{R})$ 的子代数, 且分离 X 上的点, 假设 对于任意$x \in X$, $\mathcal{A}$ 在 x 处不消失, 则 $\mathcal{A}$ 在 $C_0(X, \mathbb{R})$ 中 (范数 $\|l^\infty\|$) 稠密.*

下面给出复值版本:

定理 9.5.14. 令 $\mathcal{A}$ 为 $C_0(X,\mathbb{C})$ 的 *-子代数, 若 $\mathcal{A}$ 分离 X 中的点, 且在 X 中的每点处不消失, 则 $\mathcal{A}$ 在 $C_0(X,\mathbb{C})$ 中稠密.

我们下面给出一个 Stone-Weierstrass 定理的应用:

引理 9.5.15 (Riemann-Lebesgue 引理). 令 $I=[a,b], f\in\mathcal{R}(I,\mathbb{C})$, 则 $\lim\limits_{t\to+\infty} f(x)e^{itx}=0$ 且 $\lim\limits_{t\to-\infty} f(x)e^{-itx}=0$.

证明: 通过把 f 换成 $f(a+\frac{b-a}{2\pi}\cdot x)$, 不妨假设 $I=[0,2\pi]$.
我们不妨只考虑 $\epsilon\to\infty$ 的情况:
对于任意$\epsilon>0$, 存在 $g\in C(I,\mathbb{C})$ 使得 $\int_I|f-g|<\epsilon$.
注意到 $\mathcal{A}=\{a_1e^{ik_1x}+\cdots+a_ne^{ik_n}|\ n\in\mathbb{Z}_+, a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{C},\ k_1,\cdots,k_n\in\mathbb{C}\}$ 是 $C(I,\mathbb{C})$ 的含幺 – 子代数, 且分离 I 的点, 因此, 由 Stone-Weiestrass 定理知 $\mathcal{A}$ 在 $C(I,\mathbb{C})$ 中稠密,存在$p(x)=\sum\limits_k a_ke^{itx}$ 使得 $\sup\limits_{x\in I}|p(x)-g(x)|<\frac{\epsilon}{b-a}$, 于是 $\int_I|p-g|<\frac{\epsilon}{b-a}\cdot|I|=\epsilon.$, 又 $\int_I|f-g|\leqslant\epsilon$, 故而 $\int_I|f-p|<2\epsilon$.
注意到

$$\int_a^b e^{ikx}\cdot e^{itx}dx=\frac{e^{i(k+t)x}}{i(k+t)}\Big|_{x=a}^{x=b}=\frac{e^{i(k+t)b}-e^{i(k+t)a}}{i(k+t)}$$

在 $t\to+\infty$ 时趋向于 0, 于是 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^{2\pi}p(x)e^{itx}dx=0$. 故存在 $t_0\in\mathbb{N}$ 使得对对于任意$t\geqslant t_0$ 有 $|\int_I p(x)e^{itx}dx|\leqslant\epsilon$, 而 $|\int_I f(x)e^{itx}-\int_I p(x)e^{itx}|\leqslant\int_I|f(x)-p(x)|\leqslant 2\epsilon$, 故而 $|\int_I f(x)e^{itx}|\leqslant|\int_I p(x)e^{itx}|+2\epsilon\leqslant 3\epsilon$, 立得 $\lim\limits_{t\to+\infty} f(x)e^{itx}=0$. $\square$

第十章　常微分方程与 Arzelà-Ascoli 定理

定理 10.0.1 (Cantraction principle)**.** 令 X 是完备度量空间,$T:X\to X$ 的压缩映射, 即 存在$0<r<1$, 使 对于任意$x,x'\in X$, 都有 $d(T(x),T(x'))\leqslant rd(x,x')$, 则存在唯一的 $y\in X$, 满足 $T(y)=y$.

证明: 唯一性: 若 $T(y_1)=y_1,T(y_2)=y_2$, 则 $0\leqslant d(y_1,y_2)=d(T(y_1),T(y_2))\leqslant rd(y_1,y_2)$, 由 $0<r<1$ 知只能 $d(y_1,y_2)=0$, 故 $y_1=y_2$.
存在性: 任取 $x_0\in X$, 令 $x_1=T(x_0),x_2=T(x_1),\cdots,x_n=T(x_{n-1})$, 则由 $d(x_n,x_{n+1})=d(T(x_{n-1}),T(x_n)\leqslant rd(x_{n-1},x_n)\leqslant r^2d(x_{n-2},x_{n-1})\leqslant\cdots\leqslant r^nd(x_1,x_0)$.
$d(x_{n+k},x_n)\leqslant d(x_{n+k,x_{n+k-1}})+d(x_{n+k-1},x_{n+k-2})+\cdots+d(x_{n+1},x_n)\leqslant(r^{n+k-1}+r^{n+k-2}+\cdots r^n)\cdot d(x_1,x_0)\leqslant\dfrac{r^n}{1-r}d(x_1,x_0)$,
因此 $d(x_m,x_n)=0$, 故 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 设其有极限 y, 则在 $x_{n+1}=T(x_n)$ 左右同时对 n 取极限知 y 是不动点. □

定义 10.0.2. 若 X,Y 是度量空间,I 是集合, 函数 : $I\times X\to Y,\pi:\pi(t,x)$, 称为关于 X 是 Lipschitz 连续, 若存在 $L\geqslant 0$, 使得 对于任意$t\in I$,对于任意$x_1,x_2\in X$ 有 $d(\pi(t,x_1),\pi(t,x_2))\leqslant L\cdot d(x_1,x_2)$.

定理 10.0.3. 令 E 是 V 子集,I 是区间,$\pi\in C(I\times E,V)$ 关于 E Lipschitz 连续, 取 $t_0\in I$, 取 $\xi\in E$, 则满足

$$\begin{cases}f'(t)=\pi(t,f(t))\\ f(t_0)=\xi\end{cases}$$

的可导函数 $f:I\to E$ 最多只有一个.

证明: 假设可导函数 $f,g:I\to E$ 都满足上述常微分方程组, 令 $\Omega=\{t\in I:f(t)=g(t)\}$ 是 I 的闭子集, $\Omega=\{t\in I:f(t)=g(t)\}$ 是 I 的闭子集, $\Omega=(f-g)^{-1}\{0\}$ 且 Ω 非空, 则只需证 Ω 是 I 的开子集,(则由 I 连通,$\Omega=I$).

取 $x \in \Omega$, 要证 x 是 Ω 的内点, 先假设 $x \neq \sup I, \inf I$, 则存在 $\delta > 0$, 使 $[x, x+\delta] \subset I, f'(t) = \pi(t, f(t)), f: I \to F$ 连续, 由 $N-L$ 定理,

$$f(t) = f(x) + \int_x^t \pi(s, f(x))ds$$

$$g(t) = g(x) + \int_x^t \pi(s, g(s))ds$$

于是 $\|f(t) - g(t)\| \leqslant \int_x^t \|\pi(s, f(x)) - \pi(x, g(x))\| \leqslant \int_x^t L \cdot \|f(s) - g(s)\| ds$.

令 $A = \sup\limits_{x \leqslant s \leqslant s+\delta} \|f(s) - g(s)\|$, 因此若 $t \in [x, x+\delta], \|f(t) - g(t)\| \leqslant \int_x^t L \cdot A ds = L \cdot A \cdot |t - x| \leqslant L \cdot A \cdot \delta$.

取 $\delta < \frac{1}{L}$, $0 < L \cdot \delta < 1$, 取 $\sup\limits_{t \in [x, x+\delta]}$ 则有 $0 \leqslant A \leqslant (L\delta) \cdot A$, 故 $A = 0$, 于是在 $[x, x+\delta]$ 上 $f = g$, 因此 $[x, x+\delta] \subset \Omega$, 类似地,存在$\delta'$ 使得 $[x-\delta', x] \subset \Omega$, 于是 Ω 是开集, 由 I 连通性知 $f = g$. □

定理 10.0.4. *令 $\xi \in V, 0 < R < +\infty, I$ 是区间, 假设 $\pi : C(I \times \overline{B_V(\xi, R)}, V)$ 满足*

(1) π 关于 $\overline{B_V(\xi, R)}$ 是 Lipschitz 连续的;

(2) $M = \|\pi\|_\infty < +\infty$;

任取 $t_0 \in I$ 和 $0 \leqslant a \leqslant \frac{R}{M}$ 满足 $[t_0 - a, t_0 + a] \subset I$, 则存在可导函数 $f : [t_0 - a, t_0 + a] \to \overline{B_V(\xi, R)}$ 满足

$$\begin{cases} f'(t) = \pi(t, f(t)) \\ f(t_0) = \xi \end{cases}$$

证明: 令 L 为 π 关于 $\overline{B_V(\xi, R)}$ 的 Lipschitze 常数, 我们构造 f 定义在 $J = [t_0, t_0 + a]$ 满足前述常微分方程. 第一步, 假设 $\frac{R}{M} \cdot L < 1$, 因此 $a \cdot L < 1$, 定义 $T : C(J, \overline{B_V(\xi, R)}) \to C(J, V), (Tf)(t) = \xi + \int\limits_{t_0}^{t} \pi(s, f(x))ds$. 只需找 f 使 $Tf = f$.

即验证 $Tf \in \overline{B_V(\xi, R)}$ 即 $\|Tf - \xi\|_\infty \leqslant R$.

$$\|(Tf)(t) - \xi\| = \|\int_{t_0}^t \pi(s, f(s))ds\| \leqslant \int_{t_0}^t \|\pi(s, f(s))ds\| \leqslant (t - t_0) \cdot M \leqslant a \cdot M \leqslant R.$$

下来证 T 是压缩映射. 对于任意$f, g \in X, \|Tf(t) - Tg(t)\| \leqslant L \cdot \int_{t_0}^t \|f(s) - g(s)\| \leqslant L \cdot (t - t_0) \cdot \|f - g\|_\infty \leqslant a \cdot L\|f - g\|_\infty$.

第二步, 考虑一般性情况, 取 $N \in \mathbb{Z}_+$ 满足 $\frac{R}{NM}L$, 从而 $\frac{1}{N}aL < 1$, 则由 step1, 存在可导函数 $f : [t_0, t_0 + \frac{a}{N}] \to \overline{B_v(\xi, \frac{1}{N})R}$ 满足 $f'(t) = \phi(t, f(t))$. 将其按长度为 $\frac{1}{N}$ 的区间扩张. 于是在 $[t_0 - a, t_0 + a]$ 上, 满足原微分方程. □

推论 10.0.5. 令 $\xi \in V, \phi \in C(\mathbb{R} \times V, V)$ 满足

1. ϕ 关于 V 是 Lipschitz 连续的
2. $M = \|\phi\|_\infty < +\infty$

则 对于任意$a > 0$, 由前一个定理, 满足 (1) 的函数 $f_a : [-a, a] \to V$ 存在且唯一. 所有这些 f_a 函数图的并给出了 $f : \mathbb{R} \to V$ 且满足 (1) 式.

引理 10.0.6. 令 I 是开区间, X 是紧拓扑空间, Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 的开子集, $\phi \in C(I \times X \times \Omega, \mathbb{R}^N)$ 关于 Ω 是 Lipschitz 连续, $\phi = \phi(t, x, y)$. 令 $\xi = C(X, \Omega), t_0 \in I$, 则存在 $a > 0$ 满足 $J = [t_0 - a, t_0 + a] \subset I$, 存在唯一的 $f \in C(J \times X, \Omega)$ 满足 $\frac{\partial}{\partial t} f$ 处处存在且

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) = \phi(t, x, f(t, x)) \\ f(t_0, x) = \xi(x) \end{cases}$$

证明: $V = C(X, \Omega)$. 只需证明 对于任意$p \in X$, 存在预紧邻域 U_p 使得存在 $a_p > 0, [t_0 - a_p, t_0 + a_p] \subset I$, 且存在唯一 $f \in C([t_0 - a_p, t_0 + a_p] \times \overline{U_p, \Omega})$ 满足 (1), 则有 X 紧致知存在 $p_1, \cdots, p_n$ 满足 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} u_{p_i} = X$, 令 $a = \min a_{p_1}, \cdots, a_{p_n}$, 把每个 $[t_0 - a, t_0 + a] \times U_{p_i}$ 上的唯一解粘合起来得到 $f : C(J \times X, \Omega), J = [t_0 - a, t]$ 满足 (1), 对于任意$p \in X$, 取 $r > 0$, 满足 $\overline{B_{R_N}(\xi(p), 2r)} \subset \Omega$, 取 p 预紧邻域 U 是 $\mathrm{diam}(\overline{U}) < r$, 令 $T : C(J \times \overline{U}, \overline{B_{\mathbb{R}^N}}, 2r) \to C(J \times \overline{U}, \mathbb{R}^N)$.
$(Tf)(t, x) = \xi(x) + \int_{t_0}^{t} \phi(s, x, f(s, x)) ds$, 我们有 $Tf = f \iff$ f 满足 (1). 取 $a > 0$, 使 $M \cdot a < r$, 则 $\| \int_{t_0}^{t} \phi(s, x, f(s, x)) \| < r$, 则 $\|(Tf)(t, x) - \xi(p)\| < r, \|\xi(x) - \xi(p)\| < r$, 故 $\|(Tf)(t, x) - \xi(p)\| < 2r$, 故存在足够小的 q 使得 T 是压缩映射, 即 $\|Tf_1 - Tf_2\| \leqslant a \cdot L \cdot \|f_1(s, x) - f_2(s, x)\|, aL < 1$. □

定理 10.0.7. 令 I 为开区间, X 是局部紧致的 Hausdorff 空间,Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 的开子集,$\pi \in C(I \times X \times \Omega, \mathbb{R}^N)$ 满足

(1) π 关于 Ω 是 Lipschitz 连续的;

(2) 若 $x \in X, (x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ 是 X 中的网, 且 $\lim\limits_{\alpha} X_\alpha = x$, 则 $\lim\limits_{\alpha} \sup\limits_{(t,p) \in I \times \Omega} \|\phi(t, x_\alpha, p) - \phi(t, x, p)\| = 0$

令 $\xi \in C(X, \Omega)$, $t_0 \in I$, 假设函数 $f : I \times X \to \Omega$, 满足 $\dfrac{\partial}{\partial t} f$ 处处存在, 且

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) = \phi(t, x, f(t, x)) \\ f(t_0, x) = \xi(x) \end{cases}$$

则 $f \in C(I \times X, \Omega)$

证明: 只需证对任意预紧开子集 $U \subset X$, $f|_{I\times\overline{U}}$ 是连续的即可.
因此, 通过把 X 缩小为 $\overline{U}$, 不妨设 X 是紧的 Hausdorff 空间,
第一步, 令 $J=\{t_1\in I:$ 存在$a>0$, 使得$(t_1-a,t_1+a)\subset I$, 且f限制在$(t_1-a,t_1+a)\times X$上是连续的$\}$, 则由前一引理,$t_0\in J$, 因此 J 非空, 显然 J 是 I 的开子集, 只需证明 J 是 I 的闭子集, 则由 I 的连通性知 $J=I$. 令 $s\in I, s_n\in J$, 且 $s_n\to s$. 要证 $s\in J$, 注意对于任意$x\in x, t\in I\mapsto f(t,x)$ 是可导的, 因此连续, 故 $f(x_n,x)\to f(s,x)$, 即 X 上的函数列 $\{f(s_n,\cdot)\}_n$ 逐点收敛到函数 $f(s,\cdot)$ 即 $x\mapsto f(s,x)$ 是连续的.
我们有如下断言: $f(s,\cdot)$ 是连续函数.
则由前一引理, 存在 $a>0$,, 满 x 足 $(s-a,s+a)\subset I$ 且存在 $g\in C((s-a.s+a)\times X,\Omega)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}g(t,x)=\phi(t,x,g(t,x)) \\ g(s,x)=f(s,x). \end{cases}$$

对于任意x, g和f 都满足同一个微分方程且在 $t=s$ 处取值相同, 故由唯一性定理,对于任意$x\in X, g(\cdot,x)=f(\cdot,x)$, 因此 $g=f$, 因此 $s\in J$, 第一步完成.
第二步, 我们来证明断言, 不妨假设 对于任意$n, s_n\neq s$, 不妨假设有无穷多个 n 使 $s_n<s$, 通过替换 n 我们可以不妨设 对于任意$n, s_n<s$, 下面证明 $\{f(s_n,\cdot)\}_n$ 等度连续.
因为 $s_n\to s$, 存在，只需证明 存在x 的邻域 U, 对任意 $x'\in U$ 有 $\|f(s-\delta,x')-f(s-\delta',x)\|\leq\varepsilon$ 和 $\sup\limits_{(t,p)\in I\times\Omega}\|\phi(t,X',p)-\phi(t,x,p)\|\leq\varepsilon$, 因此对于 $t\in[s-\delta,s]$, 有

$$\begin{aligned}\|f(x,x')-f(t,x)\|\leqslant&\|f(s-\delta,x')-f(s-\delta,x)\|+\int_{s-\delta}^{t}\|\phi(u,x',f(u,x'))-\phi(u,x,f(u,x'))du\| \\ &\leqslant\varepsilon+\int_{s-\delta}^{t}\|\phi(u,x'f(u,x'))\|-\phi(u,x,f(u,x'))\|du+ \\ &\int_{s-\delta}^{t}\|\phi(u,x,f(u,x'))-\phi(u,x,f(u,x))\| \\ &\leqslant\varepsilon+\delta\cdot\varepsilon+\delta\cdot L\sup_{u\in[s-\delta,s]}\|f(u,x')-f(u,x)\|\end{aligned}$$

于是 $\sup\limits_{t\in[s-\delta,s]}\|f(t,x')-f(t,x)\|<4\varepsilon$. 这即证明了等度连续. □

命题 10.0.8. *令 Y 是度量空间,$\mathcal{A}\subset Y$, 则以下等价,*

(1) $\mathcal{A}$ 预紧

(2) $\mathcal{A}$ 中任意网有子网在 Y 中收敛

(3) $\mathcal{A}$ 中任意点列有子列在 Y 中收敛

证明: 我们显然有 (1) $\Longrightarrow$ (2), (1) $\Longrightarrow$ (3).
下来证 (2) $\Longrightarrow$ (1):
令 (x_α) 为 $\overline{A}$ 中的网, 因为 $x_\alpha \in \overline{A}$, 对于任意$n \in \mathbb{Z}_+$, 存在$x_{\alpha,n} \in \mathcal{A}$ 使得 $d(x_\alpha, x_{\alpha,n}) < \frac{1}{n}$. 则 $\{x_{\alpha,n}\}_{(\alpha,n)\in I\times\mathbb{Z}_+}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的网, 故其有子网 $(x_{\alpha_\beta}, n_\beta)_{\beta\in J}$ 收敛到 $y \in Y$, 又因为 $\lim\limits_{\beta} \frac{1}{n_\beta} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, 故而 $\lim\limits_{\beta} d(x_{\alpha_\beta}, y) = 0$.
(3) $\Longrightarrow$ (1) 类似. □

定理 10.0.9 (Arzelà-Ascoli(AA)). *令 X 为紧的 Hausdorff 空间, $N \in \mathbb{Z}_+$, 令 $\mathcal{A}$ 为 Banach 空间 $C(X,\mathbb{R}^N)$(取 l^∞ 范数) 的子集, 则下列命题等价:*

(1) $\mathcal{A}$ 为预紧集.

(2) $\mathcal{A}$ 逐点有界, 即 对于任意$x \in X, \sup_{f\in\mathcal{A}} \|f(x)\| < +\infty$, 且 $\mathcal{A}$ 逐点等度连续.

证明: 我们先来证明 (2) $\Longrightarrow$ (1): 假设 (2) 成立, 则 对于任意$x \in X$, 令 $B_x \subset \mathbb{R}^N$ 为包含 $\{f(x)|\ f \in \mathcal{A}\}$ 的一个有界闭球, 则 B_x 是紧的. 令 $S = \prod\limits_{x\in X} B_x$, 取乘积拓扑, 由 Tychonoff 定理, S 是紧的. 因此, $\mathcal{A}$ 中任意网 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 有子网在 S 中收敛, 即在 X 上逐点收敛, 结合等度连续与 X 是紧的知这个逐点收敛子网是一致收敛网, 于是任意网有 l^∞ 范数下的收敛子网, 且显然收敛到 $C(X,\mathbb{R}^\mathbb{N})$ 中元素, 故 $\mathcal{A}$ 在 $C(X,\mathbb{R}^\mathbb{N})$ 中预紧.
接下来我们证明 (1) $\Longrightarrow$ (2),
对于任意$x \in X$,, 定义映射 $\pi_x : C(X,\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^N$, 则由于 $\overline{\mathcal{A}}$ 是紧的, 故 $\pi_x(\overline{\mathcal{A}})$ 是紧的, 故 $\mathcal{A}$ 逐点有界.
那么只需在证明 $\overline{\mathcal{A}}$ 是等度连续的.
对于任意$\epsilon > 0$, 对于任意$f \in \overline{\mathcal{A}}$, 令 $B(f,\epsilon) = \{g \in C(X,\mathbb{R}^\mathbb{N})|\ \|f-g\|_\infty\} < \epsilon$. 那么 $\overline{\mathcal{A}} \subset \bigcup_{f\in\overline{\mathcal{A}}}$, 又注意到 $\overline{\mathcal{A}}$ 是紧的, 存在 $\overline{\mathcal{A}}$ 的有限子集 $E \subset \overline{\mathcal{A}}$ 使得 $\overline{\mathcal{A}} \subset \bigcup_{f\in E} B(f,\epsilon)$.
于是 对于任意$p \in X$, 由 E 中元素连续性, 存在 p 的一个邻域 U 使得 对于任意$x \in U$, 对于任意$f \in E$ 有 $\|f(x) - f(p)\| < \epsilon$. $g \in \overline{\mathcal{A}}$, 取 $f \in E$ 使得 $g \in B(f,\epsilon)$, 则 $\|f-g\|_\infty < \epsilon$, 故 $\|g(x)-g(p)\| \leqslant \|f(x)-f(p)\| + \|f(x)-g(x)\| + \|f(p)-g(p)\| < 3\epsilon.$, 于是等度连续条件成立. □

附注. 当 AA 定理中两个等价条件中任意一个成立时有 $\mathcal{A}$ 在 X 上一致有界, 即 $\sup\limits_{f\in A, x\in X} \|f(x)\| < +\infty$, 这是因为 $\overline{\mathcal{A}}$ 作为 $C(X,\mathbb{R}^N)$ 的紧子集是有界的, 即 存在$r > 0$, 使得 $\overline{\mathcal{A}} \subset B_{C(X,\mathbb{R}^N)}(0,r)$.

附注. 当 X 是紧度量空间时, 我们能用可数版本的 Tychonoff 定理来证明 (2) $\Longrightarrow$ (1), 从而只需要要用到对角线法而无需 Zorn 引理, 方法如下:

证明: 当 X 是紧度量空间时, X 是可分的, 故有可数稠密子集 $E \subset X$, 因为 $\mathcal{A}$ 逐点有界, 故 对于任意$x \in X$, 有紧球 $B_x \subset X$, 使得 $A(x) \subset B_x$, 于是 $A|_E$ 可以看作 $S = \prod\limits_{x\in E} B_x$

中的元素, 由可数乘积版本的 Tychonoff, S 是紧的, 故而 $\mathcal{A}$ 中任意点列 $\{f_n\}$ 有子列 $\{f_{n_k}\}$ 在 E 上逐点收敛, 由 $\mathcal{A}$ 的等度连续, 不难验证 $\{f_{n_k}\}$ 在 X 上逐点收敛, 故而一致收敛, (由 X 是紧的知 $\mathcal{A}$ 等度连续), 故而 $\mathcal{A}$ 在 $C(X,\mathbb{R}^N)$ 中预紧. □

定理 10.0.10. *令 $\xi \in \mathbb{R}^N$, $\pi \in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$ 满足 $M = \|\pi\|_\infty < +\infty$. 任取 $t_0 \in \mathbb{R}$, 则存在可导函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^N$ 满足* $\begin{cases} f'(t) = \pi(t,f(t)) \\ f(t_0) = \xi. \end{cases}$

证明: Step 1: 不妨设 $t_0 = 0$, 我们只需证明存在 $f:[0,1]\to\mathbb{R}^N$, 满足方程, 则类似地, 存在 $f_1:[1,2]\to\mathbb{R}^N$ 满足 $f_1'(t) = \pi(t,f_1(t))$, $f_1(t) = f(1)$, 这说明我们可以将 f_2 与 f_1 粘起来得到 $[0,2]$ 上的函数满足原方程, 这样反复延拓即可得到 $\mathbb{R}$ 的函数满足原方程.
我们来证明 $[0,1]$ 上有函数 f 满足要求:
Step 2:$\overline{B_{\mathbb{R}^N}(\xi,M)} = \{p\in\mathbb{R}^N|\ \|p-\xi\|\leqslant M\}$.
由 Stone-Weierstrass 定理, 对于任意$n\in\mathbb{Z}_+$, 存在多项式$\pi_n\in\mathbb{R}[t,x_1,\cdots,x_N]$ 使得 π_n 在 $Y=\overline{B_{\mathbb{R}^N}(\xi,M)}$ 上一致收敛到 π. 那么显然 π_n 在 Y 上有界, 且关于 $\overline{B_{\mathbb{R}^N}(\xi,M)}$ 是 Lipschitz 连续的, 故存在可导函数 $f_n:[0,1]\to\overline{B_{\mathbb{R}^N}(\xi,M)}$ 满足 $\begin{cases} f_n'(t) = \pi_n(t,f_n(t)) \\ f_n(0) = \xi \end{cases}$
因此 $f_n(t) = \xi + \int_0^t \pi_n(s,f_n(s))ds$. Step 3: 因为 π_n 在 Y 上一致收敛到 π, 显然 $L = \sup\limits_n \sup\limits_{(t,p)\in Y} < +\infty$. 若 $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant 1$, 则

$$\|f_n(t_2)-f_n(t_1)\| \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \|\pi_n(s,f_n(s))\|ds \leqslant L\cdot(t_2-t_1)$$

由此可见 $\{f_n\}$ 是 $[0,1]$ 上的等度连续函数列, 且由 $\|f_n(t)-\xi\|\leqslant tL$ 知 f_n 在 $[0,1]$ 上逐点有界, 于是由 Arzelà-Ascoli 定理, 有 f_n 存在一致收敛子列, 于是为简单起见, 我们可以不妨 $\{f_n\}$ 是一致收敛的函数, 设 f_n 一致收敛到 f, 且由于 $f_n(0)=\xi$, 故 $f(0)=\xi$.
于是我们接下来只需证明 $f(t) = \int_0^t \pi(s,f(s))ds$. 注意到 $f(t) = \lim\limits_n f_n(t) = \lim\limits_n \int_0^t \pi_n(s,f_n(s))ds$, 故而我们只需证 $\pi_n(s,f_n(s))$ 在 $s\in[0,1]$ 上一致收敛到 $\pi(s,f(s))$.
事实上,

$$\|\pi_n(s,f_n(s))-\pi(s,f(s))\| \leqslant \|\pi_n(s,f_n(s))-\pi(s,f_n(s))\| + \|\pi(s,f_n(s))-\pi(s,f(s))\|$$

由于 π_n 在 Y 上一致收敛到 π, 故而 $\|\pi_n(s,f_n(s))-\pi(s,f_n(s))\|$ 一致收敛到 0.
而由 π 在 Y 上一致连续, 则 对于任意$\epsilon>0$, 存在$\delta>0$, 对于任意$p_1,p_2\in Y$, $\|p_1-p_2\|<\delta\leqslant\|\pi(p_1)-\pi(p_2)\|<\epsilon$. 因此, 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{s\in[0,1]}\|(s,f_n(s))-(s,f(s))\| = 0$, 可知 $\|\pi(s,f_n(s))-\pi(s,f(s))\|$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛到 0.
故而 $\|\pi_n(s,f_n(s))-\pi(s,f(s))\|$ 一致收敛到 0, 进而 f 即为所求. □

定理 10.0.11. 令 $\xi \in \mathbb{R}^N, 0 < R < +\infty$, I 是区间, 假设 $\pi \in C(I \times \overline{B_{\mathbb{R}^N}(\xi, R)}), \mathbb{R}^N$, 令 $M = \|\pi\|_\infty$, 任取 $t_0 \in I$ 与 $0 \leqslant a \leqslant \frac{R}{M}$ 满足 $[t_0 - a, t_0 + a] \subset I$, 则存在可导函数 $f : [t_0 - a, t_0 + a] \to \overline{B_{\mathbb{R}^N}(\xi, R)}$ 满足 $\begin{cases} f'(t) = \pi(t, f(t)) \\ f(t_0) = \xi \end{cases}$

证明: 不妨令 $I = [t_0 - a, t_0 + a]$. 由 Tietze 扩张定理, 我们能把 π 延拓成 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ 上有紧支集的函数, 且 $\|\pi\|_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N} = \|\pi\|_{I \times \overline{B_{\mathbb{R}^N}(\xi,R)},\infty} = M$. 由前一定理, 存在可导函数 $f : [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}^N$ 满足方程. 于是

$$\|f(t) - \xi\| = \|f(t) - f(t_0)\| = \|\int_{t_0}^{t} \pi(s, f(s))ds\| \leqslant M \leqslant R.$$

故 $f([t_0 - a, t_0 + a]) \subset \overline{B_{\mathbb{R}^N}(\xi, R)}$. □

利用类似的想法, 我们证明

定理 10.0.12. 令 $I = [a, b]$ 为紧区间, 令 Ω 为 $\mathbb{R}^N$ 开子集, $\pi \in C(\Omega, \mathbb{R}^N)$ 是 Lipschitz 连续的, 令 $\xi \in \Omega$, 假设 $f : I \to \Omega$ 处处可导且满足

$$\begin{cases} f'(t) = \pi(f(t)) \\ f(a) = \xi \end{cases}$$

则存在 ξ 的邻域 $U \subset \Omega$ 以及唯一的 $F : I \times U \to \Omega$ 处处连续, 且关于 I 可导, 且

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} F(t, x) = \pi(F(t, x)) \\ F(a, x) = x \end{cases}$$

证明: 只需找到 U 使得 对于任意$x \in U$, 存在$F(\cdot, x) : I \to \Omega$ 满足方程, 那么 F 的连续性由前述定理即可保证.
只需证 Ω 是 N 维开立方体时的情形, 则一般情况通过用 Ω 内的开立方体覆盖 $f(I)$, 得到 Lebesgue 数 δ, 并将 I 分为 n 等分 ($\frac{1}{n} < \delta$) 得到.
因此, 我们假设 $\Omega = J_1 \times J_2 \times J_N$ 是 N 维开立方体, 取 N 维开立方体 $\Gamma = K_1 \times \cdots \times K_N$ 包含 $f(I)$ 且满足 $\overline{\Gamma} \subset \Omega$, 即 $\overline{K_i} \subset J_i$.
Claim 1: 存在光滑函数 $h_i \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$ 满足 $h_i|_{\overline{K_i}} = 1$ 且 $\mathrm{supp}(h_i) \subset J_i$.
则 h_i 是 Lipschitz 连续的.
令 $g : \mathbb{R}^N \to [0, 1]$, $g(x_1, \cdots, x_n) = h_1(x_1) \cdots h_N(x_N)$, 则 g 支集在 Ω 内, 且 g 是 Lipschitz 连续, 令 $\psi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $\psi(x) = \begin{cases} g(p)\pi(p) & (p \in \Omega) \\ 0 \ (p \notin \Omega) \end{cases}$
Claim 2: ψ 是 Lipschitz 连续的.
由 ODE 解存在性理论, 存在函数 $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ 满足 $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} F(t, x) = \psi(F(t, x)) \\ F(a, x) = x \end{cases}$

且由 ODE 解的初值依赖性, F 连续. 由 ODE 解唯一性, $F(t,\xi)=f(t)$, 故 $F(I,\xi)=f(I)\subset\Gamma$, 故由 F 连续性, 存在 ξ 邻域 U 满足 $F(I\times U)\subset\Gamma\subset\Omega$, 则 $F:I\times U\to\Omega$ 满足原方程. □

其中 Claim 2 由以下引理给出:

引理 10.0.13. *令 Ω 为 $\mathbb{R}^N$ 的开子集, $\pi:\Omega\to\mathbb{R}$ 是 Lipschitz 连续, $g\in C_C(\Omega,\mathbb{R})$ 为 LIpschitz 连续的, 定义*

$$\psi(x)=\begin{cases} g(x)\pi(x)\ (x\in\Omega)\\ 0\ (x\notin\Omega)\end{cases}$$

则 ψ 是 Lipschitz 连续的.

证明: $\mathbb{R}^N$ 有开覆盖 $\Omega\cup(\mathbb{R}^N\setminus k)$. $\psi|_\Omega=g\cdot\pi$ 在 Ω 上连续, $\psi|_{\mathbb{R}^N\setminus}=0$ 在 $\mathbb{R}^N\setminus$ 上连续, 故 ψ 连续.
取 $L\geqslant 0$ 使 对于任意$x,y\in\Omega$ 有 $\|\pi(x)-\pi(y)\|\leqslant\|x-y\|$, $|g(x)-g(y)|\leqslant L(x-y)$, 令 $K=\operatorname{supp}g$. 则 K 是 Ω 的紧子集, 任取 $x,y\in\mathbb{R}^N$
(1) 若 $x,y\in K$, 则 $|\psi(x)-\psi(y)|\leqslant|g(x)-g(y)|\cdot|\pi(x)|+|g(y)|\cdot|\pi(x)-\pi(y)|\leqslant\|\pi\|_{K,\infty}\cdot L\|x-y\|+\|g\|_{K,+\infty}\cdot\|x-y\|$, 这里 $\|\pi\|_{K,\infty},\|g\|_{K,\infty}<+\infty$ 是因为 π,g 在紧集 K 上是连续函数.
(2) 若 $x,y\in\mathbb{R}^N\setminus K$, 则 $|\psi(x)-\psi(y)|$ 总为 0.
(3) 若 $x\in K,y\in\mathbb{R}^N\setminus K$,
当 $y\in\Omega\setminus K$, 时, 仍有 $|\psi(x)-\psi(y)|\leqslant|g(x)-g(y)|\cdot|\pi(x)|\leqslant\|\pi\|_{K,\infty}\cdot L\|x-y\|$.
当 $y\in\mathbb{R}^N\setminus\Omega$, 因为 K 紧, 令 $R=d(K,\mathbb{R}^N\setminus\Omega)=\inf\limits_{u\in K,v\in\mathbb{R}^N\setminus\Omega}\|u,v\|$ 是有限的, 因为 $\psi:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ 连续, 且有紧支集 (包含于 K 内), 故 $M=\|\psi\|_\infty<+\infty$, 则 $|\psi(x)-\psi(y)|\leqslant 2M\leqslant\frac{2M}{R}\cdot\|x-y\|$.
综上, ψ 是 Lipschitz 连续的. □

claim 1 由如下命题得出:

命题 10.0.14. *令 $0<a<b$, 则存在光滑函数 $h:\mathbb{R}\to[0,1],h|_{[-a,a]}=1,\operatorname{supp}h\subset(-b,b)$.*

证明: 考虑 $\alpha(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x^2}}\ (x>0)\\ 0\ (x\geqslant 0)\end{cases}$ 令 $c=\frac{a+b}{2}$, 令 $\beta(x)=h(x-c)h(x+c)$, 则 $\beta:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ 光滑, 在 $[-a,a]$ 上大于 0 且支集为 $[-c,c]$. 令 $\gamma(x)=\alpha(x-a)+\alpha(x+a)$, 则 $h=\frac{\beta}{\beta+r}$ 满足条件. □