分析-2 Lecture Notes

Instructor: 归斌
Notes Taker: 欧阳张腾

Qiuzhen College, Tsinghua University

2022 Spring

目录

第一章　偏导数

1.1　偏导数

我们记 $\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\},\mathbb{Z}_+=\{1,2,3,\cdots\}$. 我们固定一个 Banach 空间 V.

定义 1.1.1. 令 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 开集,$p\in\Omega$,$v\in\mathbb{R}^N$. 若

$$(\nabla_v f)(p):=\frac{d}{dt}f(p+tv)\Big|_{t=0}\left(=\lim_{t\to 0}\frac{f(p+tv)-f(p)}{t}\right)$$

极限存在, 则把 $(\nabla_v f)(p)$ 称为 f 在 p 处**沿 v 的 (方向) 导数**. 记 $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}f\right)(p)=(\partial_{x_i}f)(p)$ 为 f 在 p 处沿第 i 个坐标轴的方向导数.

我们想计算 $f\circ\gamma$ 在 $t=0$ 处的导数, 若 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\Omega$ 可导且 $\gamma(0)=p$, 我们想要 $f\circ\gamma$ 在 $t=0$ 处的导数也存在并计算其导数, 哪怕知道 f 在每个方向有导数也是不够的. 我们需要一个更强的定义:

定义 1.1.2. 给定开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 和函数 $f:\Omega\to V$, 令 $p\in\Omega$. 假设存在 $\mathbb{R}$-线性映射 $A:\mathbb{R}^N\to V$, 使得对 $v\in\mathbb{R}^N$, 我们有

$$f(p+v)=f(p)+A\cdot v+o(v), \text{即} \lim_{v\to 0}\frac{\|f(p+v)-f(p)-A\cdot v\|}{\|v\|}=0$$

则称 f 在 p 处**可微**并称 A 是 f 在 p 处的**微分**. 我们记 $A=df|_p=df(p):\mathbb{R}^N\to V$. 若 f 处处可微, 则称 f 是**可微函数/映射**.

注记. 显然, 若 f 在 p 处可微, 则 f 在 p 处沿任何 $v\in\mathbb{R}^N$ 有方向导数 $(\nabla_v f)(p)=df|_p\cdot v$. 记 $e_1,\cdots,e_N$ 为 $\mathbb{R}^N$ 的标准坐标向量, 则 $df|_p\cdot e_i=\partial_{x_i}f(p)$. 故由 $df|_p$ 的线性性, 若 $V=(a_1,\cdots,a_N)=\sum_{i=1}^N a_ie_i$, 则

$$df|_p\cdot v=\sum_{i=1}^N\partial_{x_i}f(p)\cdot a_i$$

或者简记为

$$df=(\partial_{x_1}f,\cdots,\partial_{x_N}f)$$

若 $V=\mathbb{R}^L$ 且 $f=\left(f^1,\cdots,f^L\right)$ 则 $df|_p$ 在标准坐标基下的矩阵表示是

$$\left(\partial_{x_j}f^i\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant L\\1\leqslant j\leqslant N}}=\begin{pmatrix}\partial_{x_1}f^1 & \partial_{x_2}f^1 & \cdots & \partial_{x_N}f^1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \partial_{x_1}f^L & \partial_{x_2}f^L & \cdots & \partial_{x_N}f^L\end{pmatrix}$$

称为在 p 处的 **Jacobi 矩阵**并记为$\boldsymbol{Jac(f)(p)}$. 因此, 若 $v=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$ 则 $df|_p \cdot v = \mathrm{Jac}(f)(p)\cdot v$.

命题 1.1.3. *若 I 是区间,$t_0\in I$,$\gamma: I\to\Omega$ 在 t_0 处可导, 且 $f:\Omega\to V$ 在 $p=\gamma(t_0)$ 处可微, 则 $f\circ\gamma$ 在 t_0 处可导且*

$$(f\circ\gamma)'(t_0)=df|_p\cdot\gamma'(t_0)\,(\text{chain rule})$$

注记. 若记 $\gamma(t)=\left(\gamma^1(t),\ldots,\gamma^N(t)\right)$, 则 $(f\circ\gamma)'(t_0)=\sum_{i=1}^{N}\partial_{x_i}f\left(\gamma\left(t_0\right)\right)\cdot\partial_t\gamma^i\left(t_0\right)$.

证明: 记 $A=df|_p$ 则

$$f(\gamma(t))-f(p)=f(p+\gamma(t)-p)-f(p)=A(\gamma(t)-p)+o(\gamma(t)-p)$$

注意 $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\gamma(t)-p}{t-t_0}=\gamma'(t_0)$. 记 $\dfrac{o(\gamma(t)-p)}{\|\gamma(t)-p\|}=0$, 若 $\gamma(t)-p=0$. 则 $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{o(\gamma(t)-p)}{\|\gamma(t)-p\|}=0$ 故

$$\lim_{t\to t_0^+}\frac{o(\gamma(t)-p)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0^+}\frac{o(\gamma(t)-p)}{\|\gamma(t)-p\|}\cdot\left\|\frac{\gamma(t)-p}{t-t_0}\right\|=0\cdot\left\|\gamma'(t_0)\right\|=0$$

类似地, $\lim\limits_{t\to t_0^-}\dfrac{o(\gamma(t)-p)}{t-t_0}=0$. 故 $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{f(\gamma(t))-f(p)}{t-t_0}=A\gamma'(t_0)+0=A\gamma'(t_0)$. □

定义 1.1.4. 若 $\Omega\in\mathbb{R}^N$ 是开集, 则记$\boldsymbol{C^1(\Omega,V)}$ 为所有满足 $\partial_{x_1}f,\cdots,\partial_{x_N}f$ 存在且连续的 $f\in C(\Omega,V)$. 更一般地, 定义所有 **n 次连续可微函数**构成的空间

$$C^n(\Omega,V)=\{f\in C(\Omega,V):\partial_{x_{i_1}}\cdots\partial_{x_{i_k}}f\in C(\Omega,V),\forall 0\leqslant k\leqslant n,\forall 1\leqslant i_1,\cdots,i_k\leqslant N\}$$

这里 $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$.$C^\infty(\Omega,V)$ 中的元素称为**光滑函数/映射**.

注记. 与 1 维情形不同, 对于高维, 我们不对非开集的 Ω 定义 $C^N(\Omega,V)$. 对于开集 Ω, 则 $C^N(\Omega,V)$ 没有良好的范数.

以上定义中的“可微”来源于如下性质:

命题 1.1.5. *若 $f\in C^1(\Omega,V)$ 则 f 在 Ω 上可微, 且 $df=(\partial_{x_1}f,\cdots,\partial_{x_N}f)$ 是 (显然) 连续的.*

证明: 令 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中开集. 我们对 N 用归纳法.$N=1$ 时, 命题显然成立.

假设 $\mathbb{R}^N$ 的情形已证, 我们考虑 $\mathbb{R}^{N+1}$ 的情形. 任取 $p\in\Omega\subset\mathbb{R}^{N+1}$, 我们要证明 f 在 p 处可微. 不妨假设 $p=0$, 记 $v=(x_1,\cdots,x_N,y)=(x_\bullet,y)$, 记关于第 j 个分量的偏导数为 ∂_j, 则

$$\begin{aligned}
f(x_\bullet,y)=&f(x_\bullet,0)+\int_0^y\partial_{N+1}f(x_\bullet,t)dt\\
=&f(x_\bullet,0)+\partial_{N+1}f(x_\bullet,0)\cdot y+\int_0^y(\partial_{N+1}f(x_\bullet,t)-\partial_{N+1}f(x_\bullet,0))dt\\
=&f(x_\bullet,0)+\partial_{N+1}f(x_\bullet,0)y+o(y)\\
=&f(0,0)+\sum_{i=1}^N\partial_i f(0,0)\cdot x_i+o(x_\bullet)+\partial_{N+1}f(x_\bullet,0)y+o(y)\\
=&f(0,0)+\sum_{i=1}^N\partial_i f(0,0)x_i+\partial_{N+1}f(x_\bullet,0)y+o(v)
\end{aligned}$$

□

命题 1.1.6 (链式法则 chain rule)**.** 令 $\Gamma \subset \mathbb{R}^M, \Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是开集,$f : \Omega \to V$ 和 $g : \Gamma \to \Omega$ 都是 C^1 的. 则 $f \circ g \in C^1(\Gamma, V)$ 且对任意 $p \in \Gamma$ 有

$$d(f \circ g)|_p = df|_{g(p)} \cdot dg|_p$$

注记. 以上条件可以放宽, 即只要求 g 在 p 处和 f 在 $g(p)$ 处可微, 则有 $f \circ g$ 在 p 处可微. 且以上等式成立.

证明: 显然 $f \circ g$ 连续, 我们证明过如下形式的 chain rule:

$$\text{若}\gamma : [a,b] \to \Omega\text{处处可微, 则}(f \circ \gamma)'(t) = df|_{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t).$$

记 $p = (p_1, \cdots, p_M), \gamma(t) = g(p_1 + t, p_2, \cdots, p_M)$, 则由

$$\gamma'(0) = \partial_{x_1} g(p), (f \circ \gamma)'(0) = \partial_{x_1}(f \circ g)(p), df|_{\gamma(0)} = df|_{g(p)}$$

因此

$$\partial_{x_1}(f \circ g)(p) = df|_{g(p)} \cdot \partial_{x_1} g(p)$$

由 $f, g \in C^1$ 知以上等式右边关于 p 连续, 故 $\partial_{x_1}(f \circ g)$ 连续. 类似地,$\forall i$ 有 $\partial_{x_i}(f \circ g)$ 连续, 这证明了 $f \circ g \in C^1(\Omega, V)$. 且我们有

$$\partial_{x_i}(f \circ g)(p) = df|_{g(p)} \cdot \partial_{x_i} g(p)$$

即 $d(f \circ g)|_p \cdot e_i = df|_{g(p)} \cdot dg\Big|_p \cdot e_i$ 这里 $e_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$(第$i$位). 因此

$$d(f \circ g)|_p = df|_{g(p)} \cdot dg\Big|_p$$

□

我们接下来给几个 chain rule 的应用.

定理 1.1.7 (有限增量定理)**.** 令 $f : \Omega \to V$ 处处可微. 取 $x, y \in \Omega$ 且假设 $[x, y] \subset \Omega$, 这里 $[x, y] = \{(1-t)x + ty : t \in [0,1]\}$. 则

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \sup_{z \in [x,y]} \|df|_z\| \cdot \|y - x\|.$$

注记. 这里 $\|df|_z\|$ 是 $A = df|_z : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ 的算子范数,

$$\|A\| = \sup_{\|v\| \leqslant 1} \|Av\| = \sup_{\|v\|=1} \|Av\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$$

我们有 $\|Av\| \leqslant \|A\| \cdot \|v\|$.

证明: 令 $\gamma(t) = (1-t)x + ty$, 则 $\gamma : [0,1] \to \Omega$. 根据单变量函数的有限增量定理

$$\|f(y) - f(x)\| = \|f \circ \gamma(1) - f \circ \gamma(0)\| \leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \left\|(f \circ r)'(t)\right\| \cdot (1 - 0).$$

而

$$\left\|(f \circ \gamma)'(t)\right\| = \left\|df|_{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t)\right\| = \left\|df|_{\gamma(t)} \cdot (y - x)\right\| \leqslant \sup_{z \in [x,y]} \|df|_z\| \cdot \|y - x\|.$$

□

推论 1.1.8. *假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 连通,$f \in C(\Omega, V)$ 满足 $\partial_1 f, \cdots, \partial_N f$ 在 Ω 上处处存在且为 0(从而 $f \in C^1$ 且 $df = 0$), 则 f 是常值函数.*

证明: 任取 $v \in f(\Omega)$, 则 $f^{-1}(v)$ 是 Ω 的非空闭子集.

$\forall x \in f^{-1}(v)$, 由有限增量定理, 任取包含 x 的有界开球 $B \subset \Omega$, 则

$$y \in B \implies \|f(x) - f(y)\| \leqslant 0 \cdot \|x - y\| = 0$$

从而 $f(y) = f(x) = v$. 故 $B \subset f^{-1}(v)$. 从而 $f^{-1}(v)$ 是开集. 由 Ω 连通性,$f^{-1}(v) = \Omega$. □

有限增量定理往往应用于 Ω 是凸集的情况: 令 W 为赋范线性空间.

定义 1.1.9. 子集 $E \subset W$ 称为**凸集**, 若 $x, y \in E \implies [x, y] \in E$.

例子. *$\forall p \in W, R \geqslant 0$, 开球 $B_W(p, R) = \{x \in W : \|x - p\| < R\}$ 及其闭包都是凸集.*

第二章 Hilbert 空间

2.1 Fourier 级数

研究 Lebesgue 积分的一个主要动机是考虑 $C([a,b],\mathbb{C})$ 在 $\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_a^b |f|^p}$(称为$\boldsymbol{L^p}$ **范数**)下的完备化 $(1 \leqslant p < \infty)$, 它会被记为 $L^p([a,b],\mathbb{C})$ 或简单地,$L^p([a,b])$.

回忆 **Minkowski 不等式**: 若 $x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n \in \mathbb{C}$, 则

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p} \leqslant \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |y_i|^p}$$

因此若 $f,g \in C([a,b],\mathbb{C})$, 则对 $[a,b]$ 上的任意带点分划 $\sigma,\xi_\bullet$ 有 (记 $\sigma = \{a_0,\cdots,a_n\}$),

$$\begin{aligned}
S\left(|f+g|^p,\sigma,\xi_\bullet\right)^{\frac{1}{p}} &= \sqrt[p]{\sum_i \left|f\left(\xi_i\right)+g\left(\xi_i\right)\right|^p \cdot \left(a_i-a_{i-1}\right)} \\
&\leqslant \sqrt[p]{\sum_i \left|f\left(\xi_i\right)\right|^p\left(a_i-a_{i-1}\right)} + \sqrt[p]{\sum_i \left|g\left(\xi_i\right)\right|^p\left(a_i-a_{i-1}\right)} \\
&= S\left(|f|^p,\sigma,\xi_\bullet\right)^{\frac{1}{p}} + S\left(|g|^p,\sigma,\xi_\bullet\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

取 $\lim\limits_{(\sigma,\xi_\bullet)}$ 则,

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

在各 L^p 空间中, 首先引起人们兴趣的是 L^2. 我们考虑连续**周期**函数 $f:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$. 因为 $f(0)=f(2\pi)$,f 可以被看作单位圆 S^1 上的函数 $\widetilde{f}(e^{i\theta}) = f(\theta)$. 故我们记 $f \in C([0,2\pi],\mathbb{C})$.

记号:$C(X,\mathbb{C})$ 简记为$\boldsymbol{C(X)}$.

命题 2.1.1. *定义 $e_n \in C([0,2\pi])$ 为 $e_n(x) = e^{inx} (n\in\mathbb{Z})$, 则 $\{e_n\}$ 满足***正交关系***:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_m \cdot \bar{e}_n = \delta_{m,n} = \begin{cases} 0 & 若 m \neq n \\ 1 & 若 m = n \end{cases}$$

这里 $\bar{e}_n(x) = \overline{e_n(x)} = \overline{e^{inx}} = e^{-inx} = e_{-n}(x)$.

证明:

$$\int_0^{2\pi} e_m\cdot\bar{e}_n = \int_0^{2\pi} e^{imx}\cdot e^{-inx}dx \xlongequal{k=m-n} \int_0^{2\pi} e^{ikx}dx$$

$$若 k=0,\quad \int_0^{2\pi} e^{ikx}dx = \int_0^{2\pi}dx = 2\pi;\qquad 若 k\neq 0,\quad \int_0^{2\pi} e^{ikx}dx = \left.\frac{e^{ikx}}{ik}\right|_0^{2\pi} = 0$$

□

以上正交关系可以用内积空间的几何来解释.

定义 2.1.2. 令 V 为 $\mathbb{C}$ 上的线性空间, 考虑函数 $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{C}$ 和以下条件:

(1) $\forall a,b\in\mathbb{C}, x,y,z\in V$ 有

$$\langle ax+by,z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle$$
$$\langle z,ax+by\rangle = \overline{a}\langle z,x\rangle + \overline{b}\langle z,y\rangle$$

(2) $\forall x,y\in V$ 有 $\overline{\langle x,y\rangle} = \langle y,x\rangle$.

(3) $\forall x\in V$, 记$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle$, 则 $\|x\|^2\geqslant 0$(我们记 $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$).

(3+) $\forall x\in V$, 则 $\|x\|^2\geqslant 0$, 且 $\|x\|=0 \implies x=0$(注: 在条件 (1) 下, 有 $x=0 \implies \|x\|=0$).

若 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 满足 $\begin{cases}(1)\\(1)(2)\\(1)(3)\\(1)(3+)\end{cases}$, 则称为 $\begin{cases}\textbf{半双线性型} & \text{(sesquilinear form)}\\ \textbf{Hermite 型} & \text{(Hermitian form)}\\ \textbf{半正定 Hermite 型} & \text{(positive semi-definite Hermitian form)}\\ \textbf{内积} & \text{(Inner product)}\end{cases}$

(3+) 也被称为**正定**条件.

引理 2.1.3. 记 $(2')$ 为 $\forall x\in V$ 有 $\langle x,x\rangle\in\mathbb{R}$, 则 $(1)+(2)\iff(1)+(2')$. 特别地,$(1)+(3)\implies(1)+(2)$.

证明: 假设 $(1)+(2)$, 则 $\forall x\in V, \overline{\langle x,x\rangle} = \langle x,x\rangle$, 故 $(2')$ 得证.

假设 $(1)+(2')$,$\forall x,y\in V$, 则

$$\forall\lambda\in\mathbb{C}, \mathbb{R}\ni\langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = \langle x,x\rangle + \overline{\lambda}\langle x,y\rangle + \lambda\langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

故 $\lambda\langle y,x\rangle+\overline{\lambda}\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}$. 取 $\lambda=1$ 知 $\mathrm{Im}\langle y,x\rangle+\mathrm{Im}\langle x,y\rangle = 0$, 取 $\lambda=i$ 知 $\mathrm{Re}\langle y,x\rangle-\mathrm{Re}\langle x,y\rangle=0$. 故 $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$. □

注记. 若 $\langle x,y\rangle=0$ 我们说 x 与 y **正交**. 若 $S=(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 是 V 中一组元素满足

$$\langle x_\alpha, x_\beta\rangle = \delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases}1 & \text{若}\alpha=\beta\\ 0 & \text{若}\alpha\neq\beta\end{cases}$$

则称 S 是一个**标准正交向量组**.

例子. $\mathbb{C}^n$ 上定义 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $y=(y_1,\cdots,y_n)$ 之间的配对

$$\langle x,y\rangle = \lambda_1x_1\overline{y}_1+\cdots+\lambda_nx_n\overline{y}_n \quad (\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{C})$$

则 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是半双线性型 *(sesquilinear form)*

- $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}\iff$ Hermite型
- $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\geqslant 0\iff$ 半正定
- $\lambda_1,\cdots,\lambda_n>0\iff$ 正定 *(即是内积)*

例子. $C([a,b])$ 上可定义标准内积

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f\overline{g}=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

若用上式定义 $\mathcal{R}([a,b])=\{\text{Riemann可积的}f:[a,b]\to\mathbb{C}\}$, 则 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是半正定的, 它不是正定的, 因为令

$$f(x)=\delta_{x,a}=\begin{cases}1 & \text{若}x=a\\ 0 & \text{若}a<x\leqslant b\end{cases}$$

则 $f\neq 0$, 但 $\|f\|^2=\int_a^b|f|^2=0$.

例子. 考虑 $C([0,2\pi])$, 则 $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是一组标准正交向量.

等价地, 若定义 $\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\overline{g}$, 则 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是一组标准正交向量.

定义 2.1.4. 若 $f\in C(S^1)=\{\text{连续周期函数}f:[0,2\pi]\to\mathbb{C}\}$

$$\widehat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\cdot\overline{e}_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)e^{-inx}dx$$

称为 f 的模 n 的 **Fourier 系数**.

我们接下来要理解一系列性质:

- 称 f 的 **Fourier 级数展开为**

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(n)e^{inx}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{inx}$$

  其中 $c_n=\widehat{f}(n)$. 这一级数一般不一致收敛 (若 $f\in\mathcal{R}([0,2\pi])$ 不连续, 则由连续函数一致收敛到连续函数可证), 也不一定逐点收敛. 但

$$\lim_{N\to\infty}\left\|f-\sum_{n=-N}^{N}c_ne_n\right\|_2=0$$

- **Parseval 等式**

$$\|f\|_2=\sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2}$$

  即

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\widehat{f}(n)|^2$$

  令 $g_N=f-\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}(n)e_n$, 则

$$\widehat{g}_N(n)=\begin{cases}\widehat{f}(n) & \text{若}|n|>N\\ 0 & \text{若}|n|\leqslant N\end{cases}$$

则由 Parseval 等式,$\|g_N\|_2^2 = \sum\limits_{|n|>N} |\widehat{f}(n)|^2$.

显然由 $\|f\|_2 < +\infty$ 知 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |\widehat{f}(n)| < +\infty$.

故 $\lim\limits_{N\to+\infty} \|g_N\|_2^2 = 0$. 这证明了 $s_N = \sum\limits_{|n|\leqslant N} \widehat{f}(n)e_n$ 在 L^2 范数下逼近 f.

- 令 $f \in C^1(S^1)$, 则

$$
\begin{aligned}
\widehat{\partial_x f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_x f(x)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi} f(x)e^{-inx}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot(-in)e^{-inx}dx \\
&= in\widehat{f}(n)
\end{aligned}
$$

即 $\widehat{\left(\frac{1}{i}\partial_x\right) f}(n) = n\widehat{f}(n)$.

记线性算子

$$
\mathcal{D}: \begin{array}{c} C^1(S^1) \to C(S^1) \\ \mathcal{D}f = \dfrac{1}{i}\partial_x f \end{array}, \quad \mathcal{N}: \begin{array}{c} l^2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}^{S^1} \\ (\mathcal{N}g)(n) = n\cdot g(n) \end{array}
$$

则 $\widehat{\mathcal{D}f} = \mathcal{N}\widehat{f}$, 或者令 $\mathcal{F}: f \mapsto \widehat{f}$, 则 $\mathcal{F}\mathcal{D} = \mathcal{N}\mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ 诱导了 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{N}$ 之间的“等价”.

$\mathcal{N}$ 可以被理解为“对角矩阵”, 因此:

Fourier 级数给出了算子$\mathcal{D} = \dfrac{1}{i}\dfrac{d}{dx}$ 的对角化 (谱分解).

- 考虑满足**热方程** $\partial_x^2 f(x,t) = \partial_t f(x,t)$ 的周期解 (即满足 $f(x) = f(x+2\pi)$).

令 $\widehat{f}(n,t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x,t)e^{-int}dx$. 则 $-n^2\widehat{f}(n,t) = \partial_t\widehat{f}(n,t)$. 解得 $\widehat{f}(n,t) = a_n e^{-n^2 t}\,(a_n \in \mathbb{C})$.

故通解为 $f(x,t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{-n^2 t}\cdot e^{inx} = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx-n^2 t}$.

波动方程 $\partial_x^2 f(x,t) = \partial_t^2 f(x,t)$ 的周期解想法类似.

因此 Fourier 理论是解 PDE 的强大工具.

- 二元甚至多元周期函数也有 Fourier 级数:

若 $f \in C(S^1\times S^1)$, 则

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(m,n) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)e^{-imx-iny}dxdy \\
f &= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(m,n)e^{imx+iny} \quad (\text{在}L^2\text{下收敛})
\end{aligned}
$$

它可以用来解 $\Delta f(x,y,t) = \partial_t f(x,y,t)$ (其中$f \in C(S^1\times S^1)$, $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$).

2.2 Hilbert 空间及其历史

约定: $C(X,\mathbb{C}), l^p(X,\mathbb{C})$ 简记为 $C(X), l^p(X)$.

定义 2.2.1. 若 $(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是内积空间且作为度量空间 (范数 $\|\xi\| = \sqrt{\langle\xi,\xi\rangle}$, 度量 $d(\xi,\eta) = \|\xi-\eta\|$) 是完备的, 则称 $\mathcal{H}$ 是 **Hilbert 空间**.

本节 $\mathcal{H}$ 皆指代 Hilbert 空间.

例子. 令 X 是集合. 回忆 $l^2(X)=\{f: X\to\mathbb{C}: \|f\|_2^2<+\infty\}$. 这里

$$\|f\|_2^2=\sum_{x\in X}|f(x)|^2=\sup_{A\in\mathrm{fin}(2^X)}\sum_{x\in A}|f(x)|^2, \mathrm{fin}(2^X)=\{X\text{的有限子集}\}$$

回忆 Hölder 不等式:

$$\sum_{x\in X}|f(x)g(x)|\leqslant\sqrt{\sum_{x\in X}|f(x)|^2}\cdot\sqrt{\sum_{x\in X}|g(x)|^2}$$

因此若 $f,g\in l^2(X)$, 则 $f\overline{g}\in l^2(X)$. 故

$$\sum_{x\in X}f(x)\overline{g(x)}=\lim_{A\in\mathrm{fin}(2^X)}\sum_{x\in A}f(x)\overline{g(x)}$$

收敛. 令 $\langle f,g\rangle=\sum_{x\in X}f(x)\overline{g(x)}$. 则 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $l^2(X)$ 上的内积.

命题 2.2.2. *$l^2(X)$ 完备, 即它是 Hilbert 空间. 我们会证明更一般的:*

命题 2.2.3. *令 $1\leqslant p\leqslant+\infty$, 则 $l^p(X)$ 完备.*

证明: $p=1,+\infty$ 时证过, 对一般的 $1\leqslant p<+\infty$, 令 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是 $l^p(X)$ 中的 Cauchy 列, 即

$$\lim_{m,n\to\infty}\sum_{x\in X}|f_m(x)-f_n(x)|^p=0 \tag{1}$$

故 $\forall x\in X$, $\lim\limits_{m,n\to\infty}|f_m(x)-f_n(x)|^p=0$. 故 f_n 逐点收敛到函数 $f: X\to\mathbb{C}$. 由 (1)

$$\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall m,n\geqslant N,\sum_{x\in X}|f_m(x)-f_n(x)|^p<\varepsilon.$$

故 $\forall A\in\mathrm{fin}(2^X)$ 有

$$\sum_{x\in A}|f_m(x)-f_n(x)|^p<\varepsilon$$

取 $\lim\limits_{m\to\infty}$, 则 $\sum\limits_{x\in A}|f(x)-f_n(x)|^p<\varepsilon$. 结合上述几点,$\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n\geqslant N,\sum\limits_{x\in X}|f(x)-f_n(x)|^p<\varepsilon$, 即 $\|f-f_n\|_p^p\leqslant\varepsilon$. 这证明了

$$\|f\|_p\leqslant\|f-f_n\|_p+\|f_n\|_p<+\infty$$

从而 $f\in l^p(X)$, 以及 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f-f_n\|_p=0$. $\square$

命题 2.2.4. 令 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 V 上的半正定性, 则 $\forall \xi,\eta\in V$, 有 ***Cauchy-Schwartz* 不等式**$|\langle\xi,\eta\rangle|\leqslant \|\xi\|\cdot\|\eta\|$.

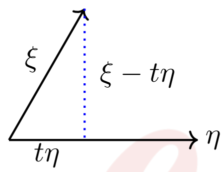
证明: 取 $\theta\in\mathbb{R}$ 使 $e^{i\theta}\langle\xi,\eta\rangle\in\mathbb{R}$. 只需证 $|\langle e^{i\theta}\xi,\eta\rangle|\leqslant\|e^{i\theta}\xi\|\cdot\|\eta\|$. 故不妨假设 $\langle\xi,\eta\rangle\in\mathbb{R}.\forall t\in\mathbb{R}$, 考虑

$$\langle\xi-t\eta,\xi-t\eta\rangle=\|\xi\|^2-2t\langle\xi,\eta\rangle+t^2\|\eta\|^2$$

记为 $p(t)$. 则 $p(t)$ 是关于 t 的一元二次方程且 $\forall t\in\mathbb{R}$ 有 $p(t)\geqslant 0$, 故其判别式 $\Delta=4\langle\xi,\eta\rangle^2-4\|\xi\|^2\|\eta\|^2\leqslant 0$. $\square$

注记. 以上证明想法如下. 假设 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是内积. 假设 $\|\xi\|=\|\eta\|=1$, 则 C-S 不等式说的是 ξ 和 η 之间夹角的余弦 $\leqslant 1$. 我们想把 ξ 沿 η 投影. 即写成

$$\xi=(t\eta)+(\xi-t\eta),t\eta\perp\xi-t\eta$$



要使这一正交关系成立, 我们希望 t 是使 $\|\xi-t\eta\|$ 最小的值, 此时

$$\xi\text{和}\eta\text{夹角余弦}\leqslant 1\iff\xi\text{在}\eta\text{上的投影}t\eta\text{长度}\leqslant 1$$

这可由 $\|\xi-t\eta\|^2\geqslant 0$ 推得. 而 $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}}\|\xi-t\eta\|^2\geqslant 0\iff p(t)\text{判别式}\leqslant 0$.

推论 2.2.5. 令 V 为内积空间, 则 $\|\xi\|=\sqrt{\langle\xi,\xi\rangle}$ 是范数.

证明:

$$\begin{aligned}\|\xi+\eta\|\leqslant\|\xi\|+\|\eta\|&\iff\langle\xi+\eta,\xi+\eta\rangle\leqslant\|\xi\|^2+\|\eta\|^2+2\|\xi\|\cdot\|\eta\|\\&\iff\|\xi\|^2+\|\eta\|^2+\langle\xi,\eta\rangle+\langle\eta,\xi\rangle\leqslant\|\xi\|^2+\|\eta\|^2+2\|\xi\|\cdot\|\eta\|\\&\iff|\langle\xi,\eta\rangle|\leqslant\|\xi\|\cdot\|\eta\|\end{aligned}$$

我们留给读者验证 $\|a\xi\|=|a|\cdot\|\xi\|$ 以及 $\|\xi\|=0\iff\xi=0$. $\square$

推论 2.2.6. $\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C},\xi\times\eta\mapsto\langle\xi,\eta\rangle$ 连续.

推论 2.2.7. 令 V 是内积空间.$\forall\eta$, 线性映射

$$\Phi(\eta):\xi\mapsto\langle\xi,\eta\rangle\in\mathbb{C}$$

有界且范数为 $\|\eta\|$.

证明: 由

$$|\Phi(\eta)\cdot\xi|=|\langle\xi,\eta\rangle|\leqslant\|\xi\|\cdot\|\eta\|$$

知 $\|\Phi(\eta)\|\leqslant\|\eta\|$. 由 $|\Phi(\eta)\cdot\eta|=\|\eta\|^2$ 知 $\|\Phi(\eta)\|=\|\eta\|$. $\square$

回忆 $\mathcal{H}^* = \{$有界线性映射$\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}\}, \|\varphi\| = \sup_{\|\xi\|=1} |\varphi(\xi)| = \sup_{\|\xi\|\leqslant 1} |\varphi(\xi)|$. 则以上推论说了:

推论 2.2.8. *令 $\mathcal{H}$ 为 Hilbert 空间, 则*

$$\Phi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*, \xi \mapsto \langle \cdot, \xi \rangle$$

是反线性的等距映射. **反线性/共轭线性**指 $\forall \xi, \eta \in \mathcal{H}, a, b \in \mathbb{C}$ 有 $\Phi(a\xi + b\eta) = \overline{a}\Phi(\xi) + \overline{b}\Phi(\eta)$.*(我们之后会证明 Φ 也是满射)*

推论 2.2.9. *令 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 V 上的半正定型. 则 $\forall \xi \in V$ 有以下等价:*

(1) $\|\xi\| = 0$

(2) $\xi \mapsto \langle \cdot, \xi \rangle$ *是零映射.*

特别地,$V_0 = \{\xi \in V : \|\xi\| = 0\}$ 是 V 的子空间.V/V_0 上有一个良定义的内积:

$$\langle \xi + V_0, \eta + V_0 \rangle = \langle \xi, \eta \rangle \tag{$*$}$$

证明: 若 $\|\xi\| = 0$ 则 $\forall \eta$ 有 $|\langle \eta, \xi \rangle| \leqslant \|\eta\| \cdot \|\xi\| = 0$, 从而 $\langle \eta, \xi \rangle = 0$. 故 (1) $\implies$ (2).

反之若 (2) 成立, 则 $\|\xi\|^2 = \langle \xi, \xi \rangle = 0$. 故 (1) 成立.

$$V_0 = \{\xi \in V : \langle \eta, \xi \rangle = 0, \forall \eta \in V\} = \{\xi \in V : \langle V, \xi \rangle = 0\}$$

显然是 V 子空间. 由此定义,$\langle V, V_0 \rangle = 0 = \langle V_0, V \rangle$. 故若 $\xi + V_0 = \xi' + V_0, \eta + V_0 = \eta' + V_0$, 则

$$\langle \xi, \eta \rangle - \langle \xi', \eta' \rangle = \langle \xi - \xi', \eta \rangle + \langle \xi', \eta - \eta' \rangle \in \langle V_0, \eta \rangle + \langle \xi', V_0 \rangle = 0$$

故 $(*)$ 良定义. 不难验证 $(*)$ 定义了 V/V_0 上的一个半正定型. 若 $\langle \xi + V_0, \xi + V_0 \rangle = 0$, 则 $\langle \xi, \xi \rangle = 0$. 则 $\xi \in V_0$. 故 $\xi + V_0$ 是 V/V_0 中的零向量, 故 V/V_0 是内积空间. □

注记. 若 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 V 上的半正定型, 则它给出了 $V/\{\xi \in V : \|\xi\| = 0\}$ 上的一个内积. 因此, 半正定型的研究总能化为内积空间的研究.

定义 2.2.10. 若 $\varphi : V_1 \to V_2$ 是内积空间之间的线性映射, 则 φ 称为**等距映射**若它作为度量空间之间的映射等距, 即

$$\forall \xi, \eta \in V_1, \|\Phi(\xi) - \Phi(\eta)\| = \|\xi - \eta\|$$

等价地,$\forall \xi \in V_1$ 有 $\|\Phi(\xi)\| = \|\xi\|$. 等价地,$\forall \xi, \eta \in V_1$ 有 $\langle \varphi(\xi), \varphi(\eta) \rangle = \langle \xi, \eta \rangle$. 等距映射一定是单射.

定义 2.2.11. 若 $\varphi : V_1 \to V_2$ 是等距满射, 则 φ 称为等距同构或**酉算子 (unitory operator)**. 此时 V_1 和 V_2 称为 (酉) 等价.

考虑内积空间 V. 它有一个完备化, 即一个等距映射 $\iota : V \to \mathcal{H}$,$\mathcal{H}$ 是度量空间. 我们不妨把 V 看成 $\mathcal{H}$ 的子度量空间. 从而 V 在 $\mathcal{H}$ 中稠密. 我们能把 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to V, (\xi, \eta) \mapsto \langle \xi, \eta \rangle$

+: $V \times V, (\xi, \eta) \mapsto \xi + \eta$

- $\cdot$: $\mathbb{C}\times V\to V, (\lambda,\xi)\mapsto\lambda\xi$

从 V 唯一地连续地扩张到 $\mathcal{H}$ 上, 使 $\mathcal{H}$ 成为一个 Hilbert 空间. 称为 V 的**完备化**.V 是 $\mathcal{H}$ 的稠密子空间.

例如 $\forall\xi,\eta\in\mathcal{H}$, 取 V 中点列 $\xi_n\to\xi,\eta_n\to\eta$, 则 $\langle\xi,\eta\rangle$ 定义为 $\lim\limits_{n\to\infty}\langle\xi_n,\eta_n\rangle$. 由 Cauchy-Schwartz 不等式可知 $\{\langle\xi_n,\eta_n\rangle\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是 Cauchy 列. 实际上,$\forall r>0$,$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 在 $\overline{B_V(0,r)}\times\overline{B_V(0,r)}$ 上一致连续, 故可延拓到 $\overline{B_{\mathcal{H}}(0,r)}\times\overline{B_{\mathcal{H}}(0,r)}$. 数乘 $\mathbb{C}\times V\to V$ 的延拓类似.

例子. *考虑 $l_0^2(X)=\{f:X\to\mathbb{C},\operatorname{supp}(f)\text{是有限集}\},\langle f,g\rangle=\sum\limits_{x\in X}f(x)\overline{g(x)}$. 则 $l^2(X)$ 是 $l_0^2(X)$ 的完备化.*

我们说过一般的赋范线性空间能完备化成 Banach 空间,Lebesgue 积分的一个主要动机是理解和“表示”$C([a,b])$ 在 $\|f\|_p=\sqrt[p]{\int_a^b|f|^p}$ 下的完备化 $L^p([a,b],m)$. 这里 m 代表 Lebesgue 测度. Hilbert 空间 $L^2([a,b],m)$ 尤其重要. 在 Fourier 级数理论中, 由 Parseval 等式

$$\frac{1}{2\pi}\int|f|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f(n)|^2$$

l^2 和 L^2 范数已引起了人们的注意, 但 Fourier 理论不足以催生 Hilbert 空间的概念, 也就是不足以让人考虑**完备**的内积空间, 也不足以让人考虑所有满足 $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}|f(n)|^2<+\infty$ 的函数 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ 构成的集合 $l^2(\mathbb{Z})$. 促使人们考虑这些概念的是如下问题:

例子. *令 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 内的一个有界区域, 边界 $\partial\Omega$. 考虑满足* ***Dirichlet* 边界条件***的波动方程*

$$\begin{cases}\left(\partial_x^2+\partial_y^2\right)f(x,y,t)=\partial_t^2f(x,y,t)\\ \qquad\qquad\quad f(x,y,t)=0\quad\text{若}(x,y)\in\partial\Omega\end{cases}$$

这一问题不能直接用 Fourier 级数求解. 历史上, 数学家通过如下方法求解: **分离变量法:** 假设 $f(x,y,t)=u(x,y)v(t)$, 求出满足以上 PDE 的解. 则一般解可写成 $\sum u_n(x,y)v_n(t)$ 的形式 (此处不严格). 将 $f=uv$ 代入 $\Delta f=\partial_t^2f$ 得 $(\Delta u)\cdot v=u\cdot\partial_t^2v$. 故

$$\frac{\Delta u(x,y)}{u(x,y)}=\frac{\partial_t^2v(t)}{v(t)}$$

左边只和 x,y 有关, 右边只和 t 有关. 故这一表达式是一个常数 $\lambda\in\mathbb{C}$. 由 $\partial_t^2=-\lambda v$ 可得 $v=A\cdot e^{i\sqrt{\lambda}t}$ 或 $A\cdot e^{-i\sqrt{\lambda}t}$.

故只需解满足 Dirichlet 条件的 **Helmholtz 方程**

$$\begin{cases}-\Delta u=\lambda u\\ \quad u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

注意若 $u,v\in C_c^\infty(\Omega)$ 由分部积分得

$$\int\partial_xu\bar{v}=-\int u\partial_x\bar{v}$$

从而 $\int(\partial_x^2 u)\cdot\bar{u}=-\int(\partial_x u)\cdot\overline{\partial_x u}\leqslant 0$. 类似地 $\int(\partial_y^2 u)\cdot\bar{u}\leqslant 0$. 故 $\int(-\Delta u)\cdot\bar{u}\geqslant 0$, 即 $\langle -\Delta u,u\rangle\geqslant 0$. 即 $-\Delta$ 是"正算子", 其特征值也 $\geqslant 0$. 故方程中的 $\lambda\geqslant 0$. 方程的解即转换为 $-\Delta$ 的谱分解 (对角化). 这里要注意几点:

我们一开始将 $-\Delta$ 定义在 $C_c^\infty(\Omega)$ 上.$-\Delta$ 一般是无界的, 即 $\sup\limits_{|f|_2\leqslant 1}\|-\Delta f\|_2=+\infty$. 这称为**无界算子**. 将 $-\Delta$ 定义在稍大的某个子空间 D 满足 $C_c(\Omega)\subset D\subset L^2(\Omega,m)$, 则 $1-\Delta\geqslant 0$ 且 $T=\dfrac{1}{1-\Delta}$ 是 $L^2(\Omega,m)$ 上的一个有界正算子. 并且 $T:L^2(\Omega,m)\to L^2(\Omega,m)$ 是**紧算子**, 即 T(单位球) 是预紧的. 紧算子 T 有很好的对角化理论 (**Hilbert-Schmidt 定理**) 从而 $-\Delta$ 有很好的对角化. 历史上紧算子以更具体的方式出现: 在解

$$\begin{cases}-\Delta f=0\\ f|_{\partial\Omega}=g\end{cases}$$

的问题时要解积分方程

$$g(x)=\lambda u(x)+\int_a^b K(x,y)u(y)dy$$

(参见《古今数学思想》章 45 节 1 或 Barry Simon《Operator Theorey, A Comprehensive Course in Analysis, Part 4》定理 3.3.9)

这里 $T:C([a,b])\to C([a,b]),u\mapsto\int_a^b K(x,y)u(y)dy, K\in C([a,b]^2,\mathbb{R})$.

引理 2.2.12. *给予 $C([a,b])L^2$ 范数, 则 T 有界, 故能扩张成完备化 $L^2([a,b])\to L^2([a,b])$ 上的有界线性映射.*

证明: 任取 $u\in C([a,b])$. 令 $I=[a,b]$, 则

$$|Tu(x)|\leqslant\int_I|K(x,y)u(y)|dy\leqslant\sqrt{\int_I|K(x,y)|^2dy}\cdot\|u\|_2$$

故

$$\|Tf\|_2^2=\int_I|Tu(x)|^2dx\leqslant\|u\|_2^2\cdot\int_I\int_I|K(x,y)|^2dxdy$$

故 T 有界且 $\|T\|\leqslant\iint_{I\times I}|K(x,y)|^2dxdy$ □

由于 K 是实的, 不难看出 $\langle Tu,v\rangle=\langle u,Tv\rangle$, 即 T 是"Hermite/自伴"算子.

$T:L^2(I)\to L^2(I)$ 实际上是紧算子, 这和证明 $T:C(I)\to C(I)(C(I)$ 给予 l^∞ 范数) 的证明一样.(分析一作业 14 补充题 4)

我们希望 T 有好的对角化理论 (特别地,$L^2(I)$ 应有一组"标准正交基"是 T 的特征向量) 这只有在考虑 T 作用在 $L^2([a,b])$ 而不只是在 $C([a,b])$(给予内积 $\int u\bar{v}$) 下才能做到. Hilbert 在考虑这一问题时, 把 T 转换成作用在 u 的 Fourier 级数上, 即当 $[a,b]=[0,2\pi]$,

$$\widehat{T}:\widehat{u}\mapsto\widehat{T}\widehat{u},(\widehat{T}\widehat{u})(m)=\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\widehat{K}(m,n)\widehat{u}(n)$$

这里 $\widehat{K}$ 是 K 的 Fourier 级数

$$\widehat{K}(m,n)=\langle Te_n,e_m\rangle=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}K(x,y)e^{iny-imx}dxdy$$

T 作用在 $L^2([0,2\pi])$ 等价于 $\widehat{T}$ 作用在 $l^2(\mathbb{Z})$ 上. 因此, 最早 (紧) 有界算子是被当作 $\infty\times\infty$ 矩阵 $(\widehat{K}(m,n))_{m,n\in\mathbb{Z}}$ 来研究的.

Hilbert 和 Schmidt 发现, 只有把这个矩阵定义在整个 $l^2(\mathbb{Z})$ 上 (而不是比如连续函数的 Fourier 级数构成的子空间上) 时这个矩阵有很好的对角化理论. 这是他们第一次认识到考虑整个 $l^2(\mathbb{Z})$ 的重要性.$l^2(\mathbb{Z})$ 是最早的 Hilbert 空间.

小结: Hilbert 空间以及其 (紧) 算子来源于积分方程和算子

$$u\mapsto\int_a^b K(x,y)u(y)dy$$

的对角化问题. 通过 Fourier 级数, 人们转而研究 $l^2(\mathbb{Z})$ 和 $\infty\times\infty$ 矩阵的形式的 Hilbert 空间和 (紧) 算子、Fourier 级数对 $l^2(\mathbb{Z})$ 和 $\infty\times\infty$ 矩阵研究的.

我们以后会看到: 在 Hilbert 和 Schmidt 得到紧算子谱分解过程中, 包含很多重要概念的早期形式: 对偶空间, 弱 $*$ 拓扑,Banach-Alaoglu 定理......("完备" 度量在当时都不是一个成熟概念) 脱离了 (紧) 算子, 谱分解, 对偶, 紧性...... 我们无法真正理解 Hilbert 空间, 就像脱离了群作用和群表示我们无法真正理解群.

2.3 Hilbert 空间中的正交分解

本节 $\mathcal{H}$ 皆指代 Hilbert 空间.

定理 2.3.1 (平行四边形法则). $\forall\xi,\eta\in\mathcal{H}$ 有 $\|\xi+\eta\|^2+\|\xi-\eta\|^2=2\|\xi\|^2+2\|\eta\|^2$.

定理 2.3.2. 令 $C\subset\mathcal{H}$ 是闭的凸子集. 任取 $\xi\in\mathcal{H}$, 则存在唯一的 $\eta\in C$ 满足

$$\|\xi-\eta\|=\inf_{\mu\in C}\|\xi-\mu\|$$

证明: 通过把 ξ 平移到 0,C 平移到 $C-\xi=\{\eta-\xi:\eta\in C\}$, 不妨假设 $\xi=0$. 令

$$D=\inf_{\eta\in C}\|\eta\|$$

取 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}\subset C$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\eta_n\|=D$. 我们来证明 $\{\eta_n\}$ 是 Cauchy 列, 从而收敛到 $\eta\in C$(由于 C 是闭的). 从而

$$\|\eta\|=\lim_{n\to\infty}\|\eta_n\|=D$$

存在性即可得证. $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{Z}_+,\forall n\geqslant N$, 有

$$\|\eta_n\|\leqslant D+\varepsilon$$

任取 $m,n\geqslant N$, 则 $\|\eta_m\|,\|\eta_n\|\leqslant D+\varepsilon$. 而由于 C 是凸的,$\eta_m+\eta_n\in C$, 故 $\left\|\dfrac{\eta_m+\eta_n}{2}\right\|\geqslant 0$. 从而

$$\begin{aligned}\|\eta_m-\eta_n\|^2&=2\|\eta_m\|^2+2\|\eta_n\|^2-4\left\|\frac{\eta_m+\eta_n}{2}\right\|^2\\&\leqslant 4(D+\varepsilon)^2-4D^2=8D\varepsilon+\varepsilon^2\end{aligned}$$

由此可知 $\{\eta_n\}$ 是 Cauchy 列.

类似地, 若 $\|\eta\| = \|\eta'\| = 0$ 则

$$\left\|\eta - \eta'\right\|^2 = 2\|\eta\|^2 + 2\left\|\eta'\right\| - 4\left\|\frac{\eta+\eta'}{2}\right\|^2 \leqslant 4D^2 - 4D^2 = 0$$

故 $\eta = \eta'$. □

注记. 以上定理是我们第一次用到 $\mathcal{H}$ 的完备性. 而且我们并没用到紧性来求 C 中的最短向量.

例子. *令 $\mathcal{K}$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的线性子空间,$\xi \in \mathcal{H}$. 则以下等价:*

(1) $\|\xi\| = \inf\limits_{\eta\in\mathcal{K}} \|\xi - \eta\|$

(2) $\xi \perp \mathcal{K}$

证明: 假设 (2), 则 $\forall \eta \in \mathcal{K}$ 有

$$\|\xi - \eta\|^2 = \|\xi\|^2 + \|\eta\|^2 + \langle\xi, \eta\rangle - \langle\eta, \xi\rangle = \|\xi\|^2 + \|\eta\|^2 \geqslant \|\xi\|^2$$

故 (1) 成立.

假设 (1), 任取 $\eta \in \mathcal{K}$. 要证 $\eta \perp \xi$, 取 $\theta \in \mathbb{R}$ 使 $\langle\xi, e^{i\theta}\eta\rangle \in \mathbb{R}$. 通过把 η 换成 $e^{i\theta}$, 不妨假设 $\langle\xi, \eta\rangle \in \mathbb{R}$. 由 (1),

$$\|\xi\|^2 = \inf_{t\in\mathbb{R}} \|\xi - t\eta\|^2$$

即

$$p(t) = \|\xi - t\eta\|^2 = \|\xi\|^2 + t^2\|\eta\|^2 - 2t\langle\xi, \eta\rangle$$

在 $t = 0$ 处取得最小值. 故 $\langle\xi, \eta\rangle = 0$. □

定义 2.3.3. 令 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 为 Hilbert 空间. 集合 $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ 构成一个线性空间, 即直和 $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. 定义内积: 若 $(\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2) \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, 则记为 $\xi_1 \oplus \xi_2, \eta_1 \oplus \eta_2$, 则

$$\langle\xi_1 \oplus \xi_2, \eta_1 \oplus \eta_2\rangle = \langle\xi_1, \eta_1\rangle + \langle\xi_2, \eta_2\rangle$$

易证 $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ 完备, 我们把 **Hilbert 空间$\boldsymbol{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2}$** 称为 $\mathcal{H}_1$ 与 $\mathcal{H}_2$ 的**直和**. 有时也记作 $\mathcal{H}_1 \oplus^{\perp} \mathcal{H}_2$, 因为 $\forall \xi \in \mathcal{H}_1, \eta \in \mathcal{H}_2$,$\xi \oplus \bullet$ 与 $\bullet \oplus \eta$ 正交.

一般地 $\mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n$ 定义类似.

定理 2.3.4 (正交分解定理). *令 $\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{H}$ 的闭子空间 ($\mathcal{H}$ 的内积限制在 $\mathcal{K}$ 上使 $\mathcal{K}$ 成为 Hilbert 空间) 定义 $\mathcal{K}$ 的***正交补**

$$\mathcal{K}^{\perp} = \{\xi \in \mathcal{H} : \langle\xi, \mathcal{K}\rangle = 0\}$$

显然 $\mathcal{K}^{\perp}$ 也是 $\mathcal{H}$ 的闭子空间. 定义线性映射

$$\Phi : \begin{aligned} &\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^{\perp} \to \mathcal{H} \\ &\xi \oplus \eta \mapsto \xi + \eta \end{aligned}$$

则 Φ 是酉算子.

证明: 显然 Φ 线性,

$$\langle \xi+\eta, \xi'+\eta' \rangle = \langle \xi, \xi' \rangle + \langle \eta, \eta' \rangle = \langle \xi \oplus \eta, \xi' \oplus \eta' \rangle$$

故 Φ 等距. 只需证 Φ 为满射, 即 $\forall \psi \in \mathcal{H}, \exists \xi \in \mathcal{K}, \eta \in \mathcal{K}^{\perp}$ 使 $\psi = \xi - \eta$. 取 $\xi \in \mathcal{K}$ 使

$$\|\psi - \xi\| = \inf_{\mu \in \mathcal{K}} \|\psi - \mu\|$$

令 $\eta = \psi - \xi$. 则 $\eta = \inf_{\mu \in \mathcal{K}} \|\eta - \mu\|$. 故 $\eta \in \mathcal{K}^{\perp}$. □

注记. 以上定理等价于说 $\forall \psi \in \mathcal{H}$, 存在唯一 $\xi \in \mathcal{K}, \eta \in \mathcal{K}^{\perp}$ 满足 $\psi = \xi + \eta$.

注记. 以上结论常写成 $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^{\perp}$.

推论 2.3.5. *令 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{H}$ 线性闭子空间, 则有*

(a) $\mathcal{K}^{\perp\perp} = \mathcal{K}$

(b) $\mathcal{K} = \mathcal{H} \iff \mathcal{K}^{\perp} = 0$

证明: (a) 显然 $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^{\perp\perp}$. 对任意 $\psi \in \mathcal{K}^{\perp\perp}$, 则 $\psi = \xi + \eta$, 其中 $\xi \in \mathcal{K}, \eta \in \mathcal{K}^{\perp}$. 由 $\psi \perp \eta$ 知

$$0 = \langle \psi, \eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle + \langle \eta, \eta \rangle = \|\eta\|^2$$

故 $\eta = 0, \psi = \xi \in \mathcal{K}$.

(b) 若 $\mathcal{K}^{\perp} = 0$ 则显然 $\mathcal{K}^{\perp\perp} = \mathcal{H}$ 从而 $\mathcal{K} = \mathcal{H}$. 反之, 若 $\mathcal{K} = \mathcal{H}$, 若 $\xi \in \mathcal{K}^{\perp}$, 则 $\xi \perp \xi, \langle \xi, \xi \rangle = 0$. 故 $\xi = 0$, 故 $\mathcal{K}^{\perp} = 0$. □

注记. 若 V 是 $\mathcal{H}$ 的线性子空间, 则 $V^{\perp} = \overline{V}^{\perp}$(显然 $\overline{V}^{\perp} \subset V^{\perp}$, 若 $\xi \perp V, \forall \eta \in \overline{V}$, 取 $\eta_n \in V, \langle \eta_n, \xi \rangle = 0$, 则 $\langle \eta, \xi \rangle = 0$, 故 $\xi \in \overline{V}$) 因此 $V^{\perp} = 0 \iff \overline{V} = \mathcal{H}$.(即 V 在 $\mathcal{H}$ 中稠密)

定义 2.3.6. 令 $S = (e_i)_{i \in I}$ 为 $\mathcal{H}$ 中的一组向量. 若 S 是一组标准正交向量 (即满足 $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$) 且

$$\operatorname{span}_{\mathbb{C}} S = \{S\text{中元素的 (有限) 线性组合}\}$$

在 $\mathcal{H}$ 中稠密, 则称 S 是 $\mathcal{H}$ 的一组**标准正交基**.

命题 2.3.7. *任意 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 一定存在标准正交基.*

证明: 令 $P = \{\mathcal{H}\text{的标准正交向量组}\}$. 若 $S_1, S_2 \in P$, 定义 $S_1 \subset S_2$ 为偏序关系. 故 P 是非空偏序集. 若 $Q \subset P$ 是全序子集, 则 $\bigcup_{S \in Q} S$ 是 Q 的上界. 故由 Zorn 引理,P 有极大元, 记为 S. 只需证 $\overline{\operatorname{span} S} = \mathcal{H}$ 即可. 若否,$(\operatorname{span} S)^{\perp} \neq 0$. 取非零 $\mu \in (\operatorname{span} S)^{\perp}$. 则

$$S \cup \{\mu / \|\mu\|\}$$

是一组标准正交基且严格大于 S, 矛盾. □

例子. $l^2(A)$ 的一组标准正交基是 $\{\delta_a : a \in A\}$. 这里

$$\delta_a : A \to \mathbb{C}, \delta_a(b) = \delta_{a,b} = \begin{cases} 1 & (b = a) \\ 0 & (b \neq a) \end{cases}$$

命题 2.3.8. *令 I 为集合,$(e_i)_{i\in I}$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的一组标准正交基, 若 $f \in l^2(I)$, 则 $\xi = \sum_{i\in I} f(i)e_i$ 在 $\mathcal{H}$ 中收敛且若 $g \in l^2(I), \eta = \sum_{i\in I} g(i)e_i$, 则 $\langle \xi, \eta\rangle = \sum_{i\in I} f(i)\overline{g(i)}$*

证明: 因为 $\sum_i |f(i)|^2 < +\infty$, 由 Cauchy 条件, 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $A \in \mathrm{fin}(2^I)$, 使得任意 $B \in \mathrm{fin}(2^{I\setminus A})$, 有 $\sum_{i\in B} |f(i)|^2 < \varepsilon$. 从而

$$\left\| \sum_{i\in B} f(i)e_i \right\|^2 = \sum_{i\in B} |f(i)|^2 < \varepsilon$$

故 $\sum_{i\in I} f(i)e_i$ 在 $\mathcal{H}$ 中极限存在. 而由 $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ 的连续性以及

$$\lim_{A\in\mathrm{fin}(2^I)} \left(\sum_{i\in A} f(i)e_i\right) \times \left(\sum_{i\in A} g(i)e_i\right) = \xi\times\eta \in \mathcal{H}\times\mathcal{H}$$

得

$$\begin{aligned}\langle \xi, \eta\rangle &= \lim_{A\in\mathrm{fin}(2^I)} \left\langle \sum_{i\in A} f(i)e_i, \sum_{i\in A} g(i)e_i \right\rangle \\ &= \lim_{A\in\mathrm{fin}(2^I)} \sum_{i\in A} f(i)\overline{g(i)} \\ &= \sum_{i\in I} f(i)\overline{g(i)}\end{aligned}$$

□

推论 2.3.9. *令 $(e_i)_{i\in I}$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的一组标准正交基, 则*

$$\Phi : \begin{aligned} l^2(I) &\to \mathcal{H} \\ f &\mapsto \sum_{i\in I} f(i)e_i \end{aligned}$$

是酉算子.

证明: 前一命题已证明 Φ 是等距线性映射, 由等距性以及 $l^2(I)$ 完备性,$\mathcal{K} = \Phi(l^2(I))$ 是 $\mathcal{H}$ 的完备子空间, 故是闭子集. 因为 $\mathcal{K}$ 包含 $\mathcal{H}$ 的稠密子集 $\mathrm{span}\{e_i : i \in I\}$. 故 $\mathcal{K} = \mathcal{H}.\Phi$ 是满射. □

定义 2.3.10. 若 $(e_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 的标准正交基, 对 $\xi \in \mathcal{H}$

$$\widehat{\xi}(i) = \langle \xi, e_i\rangle$$

称为 ξ 在基 $(e_i)_{i\in I}$ 下的 **Fourier 系数**.

推论 2.3.11. 在以上定义中，我们有

$$\xi=\sum_{i\in I}\widehat{\xi}(i)e_i=\sum_{i\in I}\langle\xi,e_i\rangle e_i$$

以及 ***Parseval*** **等式**

$$\|\xi\|^2=\sum_{i\in I}|\widehat{\xi}(i)|^2=\sum_{i\in I}|\langle\xi,e_i\rangle|^2$$

证明: 由 $\Phi:l^2(I)\to\mathcal{H}$ 的满射性, 存在 $c\in l^2(I)$ 满足 $\xi=\sum\limits_{i\in I}c(i)e_i$. 而

$$\langle\xi,e_j\rangle=\sum_{i\in I}c(i)\langle e_i,e_j\rangle=\sum_{i\in I}c(i)\delta_{i,j}=c(j)$$

故 $\xi=\sum\limits_{i\in I}\langle\xi,e_i\rangle e_i$. 由于 Φ 等距,

$$\|\xi\|^2=\sum_{i\in I}|c(i)|^2=\sum_{i\in I}|\langle\xi,e_i\rangle|^2$$

□

例子. 考虑 $C(S^1)$ 在 $\langle f,g\rangle=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f\overline{g}$ 下的完备化 $L^2\left([0,2\pi],\dfrac{m}{2\pi}\right)$.$m$ 为 "*Lebesgue* 测度". 令 $e_n(x)=e^{inx}$, 则 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 在 $C(S^1)$ 中张成稠密子空间 (由 *Stone-Weierstrass* 定理) 故是 $L^2([0,2\pi])$ 的标准正交基. 若 $f\in C(S^1)$, 则

$$\langle f,e_n\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)e^{-inx}dx=\widehat{f}(n)$$

故 $f=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)e_n$(在 L^2 范数下收敛) 且

$$\|f\|_2^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(n)|^2$$

注记. $C(S^1)$ 与 $C([0,2\pi])$ 有相同的完备化, 因为 $C(S^1)$ 在 $C([0,2\pi])$ 和 L^2 范数下稠密.

命题 2.3.12. $l^2(I)$ 可分当且仅当 I 可数. 因此,*Hilbert* 空间 $\mathcal{H}$ 可分当且仅当 $\mathcal{H}$ 酉等价于 $l^2(\mathbb{Z})$ 或 $l^2(\{1,2,\cdots,n\})\cong\mathbb{C}^n$.

推论 2.3.13. $C([a,b])$ 的 L^2 完备化 $L^2([a,b])$ 可分.

证明: $L^2\left([0,2\pi],\dfrac{m}{2\pi}\right)$ 有标准正交基 $\{e_n=e^{inx}:n\in\mathbb{Z}\}$. □

2.4 Hilbert 空间与弱拓扑

本节 $\mathcal{H}$ 皆指代 Hilbert 空间.

定理 2.4.1 (Riesz-Fréchet 表示定理)**.** 令 $\Psi:\mathcal{H}\to\mathcal{H}^*,\eta\mapsto\langle\cdot,\eta\rangle$. 则反线性等距映射 Ψ 是满射.

证明: 不妨假设 $\mathcal{H}=l^2(X)$,X 为集合. 令 $\varphi:\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ 是有界线性映射. 我们要证明存在 $g\in l^2(X)$ 使

$$\varphi(f)=\langle f,g\rangle=\sum_{x\in X}f(x)\overline{g(x)}(\forall f\in l^2(X))$$

注意若 g 存在, 则

$$\overline{g(x)}=\langle\delta_x,g\rangle=\varphi(\delta_x)$$

故定义 $g:X\to\mathbb{C}$ 为 $g(x)=\overline{\varphi(\delta_x)}$. 我们来证 $g\in l^2(X)$. 任取有限子集 $A\subset X$. 令

$$f=\sum_{x\in A}g(x)\delta_x$$

即 $f(x)=\begin{cases}g(x) & (x\in A)\\ 0 & (x\notin A)\end{cases}$, 则 $\|f\|_2^2=\sum_{x\in A}|g(x)|^2$. 而

$$|\varphi(f)|=\left|\sum_{x\in A}g(x)\varphi(\delta_x)\right|=\sum_{x\in A}|g(x)|^2$$

由 $|\varphi(f)|\leqslant\|\varphi\|\cdot\|f\|_2$ 得 $\sqrt{\sum_{x\in A}|g(x)|^2}\leqslant\|\varphi\|$. 因为这对所有 $A\in\operatorname{fin}(2^X)$ 成立, 故

$$\sum_{x\in X}|g(x)|^2\leqslant\|\varphi\|^2$$

即 $\|g\|_2\leqslant\|\varphi\|,g\in l^2(X)$. 由 φ 的连续性,

$$\varphi(f)=\varphi\left(\sum_{x\in X}f(x)\delta_x\right)=\sum_{x\in X}f(x)\varphi\left(\delta_x\right)=\sum_{x\in X}f(x)\overline{g(x)}$$

故 $\varphi(f)=\langle f,g\rangle$. □

Riesz 表示定理的一个重要应用如下:

若 $T:\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2$ 有界线性, 则 $\forall\eta\in\mathcal{H}_2$, 线性映射

$$\xi\in\mathcal{H}_1\mapsto\langle T\xi,\eta\rangle$$

有界, 故能写成 $\langle\xi,T^*\eta\rangle$ 的形式.$T^*\eta\in\mathcal{H}_1$, 这给出了一个有界线性映射 $T^*:\mathcal{H}_2\to\mathcal{H}_1$, 满足

$$\langle T\xi,\eta\rangle=\langle\xi,T^*\eta\rangle$$

称为 T 的**伴随**.

命题 2.4.2. *令 $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ 为有界线性算子. 以下等价:*

(1) 对任意 $\xi\in\mathcal{H}$ 有 $\langle T\xi,\xi\rangle\in\mathbb{R}$

(2) $T=T^*$, 即对任意 $\xi,\eta\in\mathcal{H}$ 有 $\langle T\xi,\eta\rangle=\langle\xi,T\eta\rangle$

若 (1) 或 (2) 成立, 我们说 T **自伴**.

证明: (1) 和 (2) 都表明 $(\xi,\eta)\in\mathcal{H}\times\mathcal{H}\mapsto\langle T\xi,\eta\rangle$ 是 $\mathcal{H}$ 上的 Hermite 型. □

历史注记: Hilbert 考虑映射 $T:L^2\left(S^1,\frac{m}{2\pi}\right)\to L^2\left(S^1,\frac{m}{2\pi}\right)$, 若 $f\in C(S^1)$, 则

$$(Tf)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K(x,y)f(y)dy$$

这里 $K\in C([0,2\pi]\times[0,2\pi],\mathbb{R})$. 由于 K 取实值, 易知 $\langle Tf,g\rangle=\langle f,Tg\rangle$. 从而 T 自伴,$\langle Tf,f\rangle\in\mathbb{R}$. T 实际上是紧算子, 即 T(单位球) 预紧. 等价地, 若 $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}\subset\mathcal{H}$ 满足 $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}\|\xi_n\|\leqslant 1$, 则 $\{T\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 有收敛子列.

证明: "$\Longleftarrow$" : 若 T 紧, 对任意 $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}\subset l^2(\mathbb{Z})$ 的闭单位球 $\overline{B}$,$T(\xi_n)$ 是预紧集 $T(\overline{B})$ 点列, 故有收敛子列.

"$\Longrightarrow$" : 要证 $T(\overline{B})$ 预紧, 只需证其中任意点列 $\{T\xi_n\}$ 有收敛子列. □

我们之前说过, 通过 Fourier 级数,T 被转化成了一个 $\infty\times\infty$ 矩阵. 实际上, 因为 $L^2([a,b])\cong l^2(\mathbb{Z})$, 我们总能把 T 看成 $l^2(\mathbb{Z})$ 上的紧自伴算子. 令 $\overline{B_1}$ 为 $l^2(\mathbb{Z})$ 的单位闭球 $\overline{B_1}=\{\xi:\|\xi\|\leqslant 1\}$.Hilbert 注意到:

(1) 若给予 $\overline{B_1}$ **弱拓扑**, 则 $\xi\in\overline{B_1}\mapsto\langle T\xi,\xi\rangle$ 连续.

(2) $\overline{B_1}$ 在弱拓扑下是列紧的.

利用这两点, 他得到了关于紧自伴算子的谱分解. 也正是这一点让 Hilbert 和 Schmidt 意识到,T 对应的 $\infty\times\infty$ 矩阵应该作用在的线性空间是 $l^2(\mathbb{Z})$.

回忆若 V 是复 Banach 空间,$V^*=\{$有界线性映射$V\to\mathbb{C}\}$,(V^*, 算子范数) 是一个 Banach 空间.V^* 作为 $\mathbb{C}^V$ 子集从乘积拓扑继承的拓扑称为**弱*-拓扑**. V^* 中的网 $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in I}$ 弱 $*$-收敛到 $\varphi\in V^*$ 当且仅当 $\forall v\in V$ 有 $\lim\limits_\alpha\varphi_\alpha(v)=\varphi(v)$. V^* 中的闭单位球 $\{\varphi\in V^*:\|\varphi\|\leqslant 1\}$ 是弱 $*$-紧的 (Banach-Alaoglu 定理).

定义 2.4.3. 令 $\mathcal{H}$ 为 Hilbert 空间. 考虑双射

$$\Psi:\mathcal{H}\to\mathcal{H}^*,\xi\mapsto\langle\cdot,\xi\rangle$$

$\mathcal{H}^*$ 上的弱 $*$-拓扑通过 Ψ 拉回到 $\mathcal{H}$ 称为 $\mathcal{H}$ 的**弱拓扑**或**$\sigma(\mathcal{H},\mathcal{H})$ 拓扑**. 换言之, 弱拓扑是 $\mathcal{H}$ 上的唯一拓扑使双射 Ψ 成为同胚 (若 $\mathcal{H}^*$ 赋予弱 $*$ 拓扑). 弱拓扑由弱收敛刻画: 若 $(\xi_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的网, 则 ξ_α **弱收敛**到 $\xi\in\mathcal{H}$(即在弱拓扑下收敛到 ξ) 当且仅当对任意 $\eta\in\mathcal{H}$ 有 $\lim\limits_\alpha\langle\xi_\alpha,\eta\rangle=\langle\xi,\eta\rangle$.

注记. 若把每个 $\xi \in \mathcal{H}$ 看作 $\mathcal{H}^*$ 中的元素 $\langle \cdot, \xi \rangle$, 从而把集合 $\mathcal{H}$ 与 $\mathcal{H}^*$ 等同, 则 $\mathcal{H}$ 上的弱拓扑等于 $\mathcal{H}^*$ 上的弱 $*$-拓扑. 严格来说, 若给予 $\mathcal{H}$ 弱拓扑, 给予 $\mathcal{H}^*$ 弱 $*$-拓扑, 则

$$\Psi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*, \xi \mapsto \langle \cdot, \xi \rangle$$

是同胚.

推论 2.4.4 (Hilbert 空间的 Banach-Alaoglu 定理). *$\mathcal{H}$ 的单位球 $\overline{B_1}$ 在弱拓扑下是紧的*

证明: $\Psi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ 是等距满射, 故 $\Psi : \overline{B_1} \to \overline{B_1^*}$ 是双射, 因而是同胚. 由 Banach-Alaoglu 定理,$\overline{B_1^*}$ 在弱 $*$-拓扑下紧. □

命题 2.4.5. *若 $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 是有界紧算子, 令 $\overline{B_1} = \{\xi \in \mathcal{H} : \|\xi\| \leqslant 1\}$ 为闭单位球, 则*

$$f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}, f(\xi) = \langle T\xi, \xi \rangle$$

在弱拓扑下连续.

证明: 令 $(\xi_\alpha)_{\alpha \in A}$ 是 $\overline{B_1}$ 中的网且收敛到 $\xi \in \overline{B_1}$. 注意

$$|f(\xi_\alpha)| \leqslant \|T\| \cdot \|\xi_\alpha\|^2 \leqslant \|T\|$$

因此, 要证 $f(\xi_\alpha)$ 收敛到 $f(\xi)$, 只需证 $f(\xi_\alpha)$ 任意收敛子网收敛到 $f(\xi)$.(回忆紧空间中的网 x_α 收敛到 x 当且仅当 x_α 任意收敛子网收敛到 x) 因此, 不妨假设 $\lim_\alpha f(\xi_\alpha)$ 存在, 并证明 $\lim_\alpha f(\xi_\alpha) = f(\xi)$. 由 T 是紧算子,$\{T\xi_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \overline{T(\overline{B_1})}$ 且 $\overline{T(\overline{B_1})}$ 紧. 故 $(T\xi_\alpha)_{\alpha \in A}$ 有子网 $(T\xi_i)_{i \in I}$ 在 $\mathcal{H}$ 中以及范数拓扑下收敛. 我们计算极限: 对任意 $\eta \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}\langle \lim_i T\xi_i, \eta \rangle &= \lim_i \langle T\xi_i, \eta \rangle = \lim_i \langle \xi_i, T^*\eta \rangle \\ &= \langle \xi, T^*\eta \rangle = \langle T\xi, \eta \rangle\end{aligned}$$

故 $\lim_i T\xi_i = T\xi$. 由 ξ_i 弱收敛到 ξ, 若能证 $\langle T\xi_i, \xi_i \rangle$ 收敛到 $\langle T\xi, \xi \rangle$ 则证明了

$$\lim_\alpha f(\xi_\alpha) = \lim_i f(\xi_i) = \lim_i \langle T\xi_i, \xi_i \rangle = \langle T\xi, \xi \rangle = f(\xi)$$

证明完成. □

引理 2.4.6. *令 $(\psi_i)_{i \in I}, (\xi_i)_{i \in I}$. 假设 $R = \sup_i \|\xi_i\| < +\infty$. 若 ψ_i 收敛到 $\psi \in \mathcal{H}$,ξ_i 弱收敛到 $\xi \in \mathcal{H}$, 则 $\lim_i \langle \psi_i, \xi_i \rangle = \langle \psi, \xi \rangle$.*

证明:

$$\begin{aligned}|\langle \psi, \xi \rangle - \langle \psi_i, \xi_i \rangle| &\leqslant |\langle \psi, \xi - \xi_i \rangle| + |\langle \psi - \psi_i, \xi_i \rangle| \\ &\leqslant |\langle \psi, \xi - \xi_i \rangle| + R\,\|\psi - \psi_i\| \to 0\end{aligned}$$

□

在 $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{Z})$ 时,$\overline{B_1}$ 上弱拓扑的意义很具体.

引理 2.4.7. *令 $\overline{B_1}$ 为 $l^2(\mathbb{Z})$ 单位闭球,$(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ 为 $\overline{B_1}$ 中的网. 令 $f\in\overline{B_1}$, 则 f_α 弱收敛到 f 当且仅当对任意整数 n 有 $\lim\limits_{\alpha} f_\alpha(n)=f(n)$.*

证明: "$\Longrightarrow$" : 若 $f_\alpha \xrightarrow{w} f$, 则对任意整数 n,

$$f_\alpha(n)=\langle f_\alpha,\delta_n\rangle\to\langle f,\delta_n\rangle=f(n)$$

"$\Longleftarrow$" : 留为作业. □

推论 2.4.8. *若 $\mathcal{H}$ 可分, 则其单位闭球 $\overline{B_1}$ 的弱拓扑是可度量的.*

证明: $\mathcal{H}\cong l^2(\mathbb{N})$或$\mathbb{C}^n$, 我们讨论 $\mathcal{H}\cong l^2(\mathbb{N})$ 的情形, 后者类似. 不妨令 $\mathcal{H}=l^2(\mathbb{N})$. 定义 $\overline{B_1}$ 上的度量 d_w 为

$$d_w(f,g)=\sum_{n\in\mathbb{N}}2^{-n}|f(n)-g(n)|$$

若 $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ 是 $\overline{B_1}$ 中的网且 $f\in\overline{B_1}$, 则有前一引理,

$$\begin{aligned} f_\alpha \xrightarrow{w} f &\iff \forall n\in\mathbb{N}, f_\alpha(n)\to f(n)\\ &\iff d_w(f_\alpha,f)\to 0\end{aligned}$$

故 d_w 诱导了 $\overline{B_1}$ 的弱拓扑. □

由此我们能用对角线法证明如下 Banach-Alaoglu 定理. 这是最早被证明的 B-A 定理的版本.

定理 2.4.9 (可分 Hilbert 空间的 Banach-Alaoglu 定理 (又一证明))**.** *若 $\mathcal{H}$ 可分, 则其单位闭球 $\overline{B_1}$* **预紧***, 即在弱拓扑下紧.*

证明: 不妨假设 $\mathcal{H}=l^2(\mathbb{Z})$. 取 $\overline{B_1}$ 中点列 $\{f_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ 则对任意整数 n,$\{f_m(n)\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$ 是 $\mathbb{C}$ 中有界点列. 由对角线法,$\{f_m\}$ 有子列 $\{f_{m_k}\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 逐点收敛于 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$. 对任意正整数 N, 则

$$\sum_{|n|\leqslant N}|f(n)|^2=\lim_k\sum_{|n|\leqslant N}f_{m_k}(n)\cdot\overline{f_{m_k}(n)}\leqslant 1$$

故 $\sqrt{\sum\limits_{|n|\leqslant N}|f(n)|^2}\leqslant 1$ 对任意 N 成立. 故 $f\in\overline{B_1}$. 由 f_{m_k} 逐点收敛到 f 可知 f_{m_k} 弱收敛到 f. □

注记. 以上对 $l^2(\mathbb{Z})$ 的单位闭球 $\overline{B_1}$ 是弱列紧的证明是非常初等的. 而正是这个定理促使人们考虑,Hilbert 考虑整个 $l^2(\mathbb{Z})$ 中的元素. 因为, 比如, 当我们只考虑 $l^2(\mathbb{Z})$ 中所有由 $C(S^1)$ 中函数的 Fourier 级数得到的空间. 则它的单位闭球不再是弱紧的.

注记. $l^2(\mathbb{Z})$ 的单位球 (取弱拓扑) 是最早的一类抽象 (即不来源于 $\mathbb{R}^n$ 的有限闭子集) 紧度量空间/紧 Hausdorff 空间.

定理 2.4.10 (Hilbert-Schmidt 定理)**.** 令 $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ 是紧算子. 假设 T 是**正算子**, 即 $\forall\xi\in\mathcal{H}$ 有 $\langle T\xi,\xi\rangle\geqslant 0$. 令 $N(T)=\{\xi\in\mathcal{H}:T\xi=0\}$. 则存在递减列 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots>0$ 和单位向量 $e_1,e_2,\cdots\in\mathcal{H}$ 使 $Te_n=\lambda_n e_n(\forall n\in\mathbb{Z}_+)$.$\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 构成 $N(T)^\perp$ 的一组标准正交基.(因此 $\{e_n\}$ 和 $N(T)$ 标准正交基组成了 $\mathcal{H}$ 的一组标准正交基) 且要么 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 只有有限项, 要么 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$.

证明: 由 $\langle T\xi,\xi\rangle\in\mathbb{R}$ 知 $T=T^*$. 若 $\mathcal{K}$ 是闭子空间且 $T\mathcal{K}\subset\mathcal{K}$ 则 $T\mathcal{K}^\perp\subset\mathcal{K}^\perp$.

$$\left(\left\langle T\mathcal{K}^\perp,\mathcal{K}\right\rangle=\left\langle \mathcal{K}^\perp,T\mathcal{K}\right\rangle\subset\left\langle \mathcal{K}^\perp,\mathcal{K}\right\rangle=0\right)$$

故由 $TN(T)\subset N(T)$ 知 $TN(T)^\perp\subset N(T)^\perp$. 故 $T:N(T)^\perp\to N(T)^\perp$ 是有界算子且显然紧. 通过将 $\mathcal{H}$ 换成 $N(T)^\perp$, 不妨假设 $N(T)=0$.

Step 1:$\overline{B_1}$ 为 $\mathcal{H}$ 单位球. 令 $S=\{\xi\in\mathcal{H}:\|\xi\|=1\}$, 令

$$\lambda_1=\sup_{\xi\in S}\langle T\xi,\xi\rangle=\sup_{\xi\in\overline{B}_1}\langle T\xi,\xi\rangle$$

$f:\xi\in\overline{B_1}\mapsto\langle T\xi,\xi\rangle$ 在 $\overline{B_1}$ 的弱拓扑下连续, 故能在某个 $e_1\in\overline{B_1}$ 处取到最大值 λ_1(因为 $\overline{B_1}$ 列紧) 且由这一最大性知 $\|e_1\|=1$.

Claim:$Te_1\in\mathbb{C}e_1$, 从而由 $f(e_1)=\lambda_1$ 知 $Te_1=\lambda_1e_1$, 从而 (由 $N(T)=0$ 知)$\lambda_1>0$.

事实上, 因 $\mathbb{C}e_1=(\mathbb{C}e_1)^{\perp\perp}$, 只需证 $\forall\eta\in e_1^\perp$ 有 $\langle Te_1,\eta\rangle=0$. 由 $\langle e_1,\eta\rangle=0$ 知只需证 $\langle(\lambda_1-T)e_1,\eta\rangle=0$. 令

$$\omega:\begin{array}{c}\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}\\ \omega(\xi,\psi)=\langle(\lambda_1-T)\xi,\psi\rangle\end{array}$$

则

$$\omega(\xi,\xi)=\langle\lambda_1\xi,\xi\rangle-\langle T\xi,\xi\rangle\geqslant\lambda_1\|\xi\|^2-\lambda_1\|\xi\|^2=0$$

故 ω 是半正定型. 而 $\omega(e_1,e_1)=\langle\lambda_1e_1,e_1\rangle-\langle Te_1,e_1\rangle=\lambda_1-\lambda_1=0$. 故由 Cauchy-Schwartz 不等式,

$$|\omega(e_1,\eta)|^2\leqslant\omega(e_1,e_1)\cdot\omega(\eta,\eta)=0$$

故 Claim 为真.

Step 2: 令 $\mathcal{K}_1=\mathbb{C}e_1$,$T\mathcal{K}_1\subset\mathcal{K}_1$, 故 $T\mathcal{K}_1^\perp\subset\mathcal{K}_1^\perp$.$T:\mathcal{K}_1^\perp\to\mathcal{K}_1^\perp$ 是正的紧算子. 故存在 $e_2\in\mathcal{K}_1^\perp,\|e_2\|=1$ 使 $\langle Te_2,e_2\rangle$ 最大. 记为 λ_2. 显然 $\lambda_2\leqslant\lambda_1$. 类似于 Step 1, 我们得证 $Te_2=\lambda_2e_2$, 从而 $\lambda_2>0$.

以此类推, 我们递归地构造 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots>0$, 以及单位向量 $e_1,e_2,\cdots\in\mathcal{H}$ 满足

$$e_n\perp\mathcal{K}_{n-1}=\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{e_1,\cdots,e_{n-1}\}$$

且

$$\lambda_n=\langle Te_n,e_n\rangle=\sup_{\|\xi\|=1,\xi\perp K_{n-1}}\langle T\xi,\xi\rangle$$

且 $Te_n=\lambda_ne_n$.

Step 3: 我们证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$. 若否, 则 $\lambda:=\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n>0$. 对任意正整数 m,n,

$$\|Te_m-Te_n\|^2=\langle\lambda_me_m-\lambda_ne_n,\lambda_me_m-\lambda_ne_n\rangle=\lambda_m^2+\lambda_n^2\geqslant2\lambda^2$$

故 $\{Te_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 任意子列都非 Cauchy 列, 与 T 是紧算子矛盾.

Step 4: 要证 $S=\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是 $\mathcal{H}$ 的标准正交基, 只需证 $\overline{\operatorname{span}_{\mathbb{C}} S}=\mathcal{H}$. 令 $\mathcal{K}=\overline{\operatorname{span}_{\mathbb{C}} S}$. 由 $TS\subset S$ 知 $T\mathcal{K}\subset\mathcal{K}$, 从而 $T\mathcal{K}^{\perp}\subset\mathcal{K}^{\perp}$. 故 $T:\mathcal{K}^{\perp}\to\mathcal{K}^{\perp}$ 是紧算子. 假设 $\mathcal{K}^{\perp}\neq 0$. 令

$$\mu=\sup_{\xi\in\mathcal{K}^{\perp},\|\xi\|=1}\langle T\xi,\xi\rangle$$

则由 e_n 和 λ_n 的定义方式可知 $\mu\leqslant\lambda_n(\forall n)$, 故 $\mu=0$. 由之前的 Claim, 存在 $\xi\in\mathcal{K}^{\perp}$ 使 $\|\xi\|=1$ 且 $T\xi=\mu\xi=0$, 这与 $N(T)=0$ 矛盾. 故 $\mathcal{K}^{\perp}=0,\mathcal{K}=\mathcal{H}$. □

定理 2.4.11. 令 $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ 为紧算子. 假设 T 自伴, 即 $T=T^*$, 则存在 $N(T)^{\perp}$ 的标准正交基 $\{e_1,e_2,\cdots,f_1,f_2,\cdots\}$ 满足

$$Te_n=\lambda_n e_n, Tf_n=-\mu_n f_n$$

这里 $\lambda_n,\mu_n\in\mathbb{R},\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots>0,\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots>0$.

- 若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 有无限项则 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$
- 若 $\mu_1,\mu_2,\cdots$ 有无限项则 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=0$

证明: 用前一个定理的证法依次构造 $e_1,f_1,e_2,f_2,\cdots$ 和 $\lambda_1,\mu_1,\lambda_2,\mu_2,\cdots$:

$$\lambda_1=\sup_{\|\xi\|=1}\langle T\xi,\xi\rangle, -\mu_1=\sup_{\|\xi\|=1,\xi\perp e_1}\langle -T\xi,\xi\rangle, \lambda_2=\sup_{\|\xi\|=1,\xi\perp e_1,e_2}\langle T\xi,\xi\rangle,\cdots$$

□

Hilbert 空间, 尤其地,$l^2(\mathbb{Z})$ 和完备性的引入, 首先是为了解决自伴紧算子谱分解的问题. 完备性在如下两个地方起了关键作用:

- $\mathcal{H}$ 关于闭子空间 $\mathcal{K}$ 的正交分解 $\mathcal{H}\cong\mathcal{K}\oplus\mathcal{K}^{\perp}$.
- $\mathcal{H}$ 的单位闭球 $\overline{B_1}$ 的弱紧性, 即在弱拓扑下的紧性.

在 Hilbert 空间下, 弱拓扑往往和函数逐点收敛挂钩, 只有在考虑一般 Banach 空间时, 抽象的弱拓扑概才得以建立起来.

第三章　测度论

3.1　测度论引论

令 $1 \leqslant p < +\infty$, 我们考虑 $C([0,1])$ 在 L^p 范数 $\|f\|_p = \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ 下的完备化 $L^p([0,1])$.

$L^p([0,1])$ 中的元素 φ 可由收敛到它的 $C([0,1])$ 中的 Cauchy 列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 代表. 如果 f_n 逐点收敛到 $f:[0,1]\to\mathbb{C}$, 我们希望用 f 来代表 φ, 但这有几个问题:

- 无法保证 f_n 逐点收敛. 例如, 一个 $L^2([0,1])$ 中的元素的 Fourier 展开总是在 L^2 范数下收敛, 但不一定逐点收敛.
- 我们只能保证 $\{f_n\}$ 有子列是几乎处处逐点收敛的, 即有零测集 $\Delta \subset [0,1]$ 使子列在 $[0,1]\setminus\Delta$ 上逐点收敛.
- $\{f_n\}$ 的两个逐点收敛子列收敛到的函数只是几乎处处 **(a.e. almost everywhere)** 相等.

注记. 我们可以用一个函数 $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ 来代表 $L^p([0,1])$ 中的一个元素 φ, 但 f 不是唯一的,f 和 f' 可同时代表 φ, 若 f 和 f' 几乎处处相等.f 的取法：取 $C([0,1])$ 中点列在 L^p 下收敛到 φ, 则它有子列几乎处处收敛到 f.

不难验证, 若 f,g 代表 $\varphi,\phi \in L^p([0,1])$, 则 $af+bg$ 代表 $a\varphi+b\phi$(若 $a,b\in\mathbb{C}$).

问题 3.1.1. *$L^p([0,1])$ 中元素的收敛性能否由函数列的 (几乎处处) 逐点收敛体现? (二者关系是什么？)*

注记. 网收敛与 a.e. 收敛之间没有强关联. 考虑函数网 $(\chi_A)_{A\in\mathrm{fin}(2^{[0,1]})}$, 即 A 是 $[0,1]$ 的有限子集,χ_A 是 A 的特征函数. $\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$ 则网 $(\chi_A)_{A\in\mathrm{fin}(2^{[0,1]})}$ 处处收敛到常值函数 1. 而 $\chi_A = 0, \text{a.e.}$ 　故 $\lim\limits_{A}\|1-\chi_A\|_p \neq 0$.

以上例子表明, **测度论是非常依赖可数性的理论**.

问题 3.1.2. *Hilbert 空间 $L^2([0,1])$ 上的内积是否能由代表 $L^2([0,1])$ 中元素的函数 f,g 之间的积分 $\int_0^1 f\overline{g}$ 来表达呢? 更一般地, 令 $1<q\leqslant+\infty$ 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 回忆* ***Hölder 不等式**:$\left|\int fg\right| \leqslant \|f\|_p\cdot\|g\|_q$(它可由离散求和版本的 Hölder 不等式逼近得到).*

因此,$\forall g\in C([0,1]),\Psi_g : f\in C([0,1]) \mapsto \int fg$ 在 L^2 范数下连续. 那么一般的 $L^p([0,1])$ 上的有界线性泛函, 即有界线性映射 $L^p([0,1])\to\mathbb{C}$ 能否由 $f\mapsto\int fg$ 刻画? (答案是是的)

测度论是代数结构的几何**表示**理论:

- 用具体的函数表示 $C([0,1])$ 在 L^p 范数下的 Cauchy 列 $(1 \leqslant p < +\infty)$.
- 用函数列 a.e. 收敛来刻画 L^p 范数下的收敛.
- 用积分来表示 $L^2([0,1])$ 上的内积. 一般地, 表示 $L^p([0,1])$ 的对偶空间 $L^p([0,1])^*$ 及其元素是如何作用在 $L^p([0,1])$ 上的.
- 用函数列 a.e. 收敛来刻画 $L^2([0,1])$ 的弱收敛, 更一般地, 刻画 $L^p([0,1])^*$ 的弱 $*$ 收敛. 这个问题约等于积分与极限的交换问题.
- 用测度来表示 $C([0,1])$ 在 l^∞ 范数下的对偶空间 $C([0,1])^*$. 这一部分能够以**表示论**的形式 ($*$-代数的酉表示) 呈现, 并且与自伴算子谱理论直接相关.

测度论首先研究什么函数能代表 $L^p([0,1])$ 中的元素, 特别地, 什么特征函数 χ_A 能代表 $L^p([0,1])$ 中元素. 这样的 A 会被称为可测集.

- 若 $\Omega \subset I = [0,1]$ 是开集, 我们能找到递增的 $C_c(I,[0,1])$ 中序列 f_n 处处收敛到 χ_Ω. 若 Ω 有界, 则 $\{f_n\}$ 在 L^p 下收敛 (考虑 $N = 1,\Omega$ 是开区间作为例子).

  因此, 我们希望 χ_Ω 能代表 f_n 所收敛到的 L^p(I) 中的元素. 因此我们希望开集可测.
- 若 χ_A 能代表 $L^p(I)$ 中元素, 则 $1-\chi_A = \chi_{A^\complement}(A^\complement$ 是 A 的补集) 也能代表, 因此我们希望可测集的补集可测.
- 若 χ_A, χ_B 可代表 $L^p(I)$ 中元素, 我们希望 $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$ 也如此, 故希望可测集的有限交集可测. 取补集, 则我们希望可测集的有限并可测.
- 若 $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \subset [0,1]$ 可测, 令 $B = \bigcup\limits_n A_n$ 则 $\lim\limits_n \chi_{A_n} = \chi_B$, 我们希望 B 可测.
- 以上两条告诉我们, 若 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是 $[0,1]$ 的一列可测子集, 我们希望 $\bigcup\limits_n A_n$ 可测.

定义 3.1.3. 一个集合 X 的**σ-代数**是 2^X 的一个子集 $\mathcal{A}$ 满足:

- $\varnothing \in \mathcal{A}$.
- $E \in \mathcal{A} \implies E^\complement = X \setminus E \in \mathcal{A}$.
- 若 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是 $\mathcal{A}$ 中一列元素, 则 $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} E_n \in \mathcal{A}$.

我们称 $(X,\mathcal{A})$ 或 X 为一个**测度空间**.

若 σ-代数 $\mathcal{A}'$ 满足 $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}'$ 为 $\mathcal{A}$ 的 σ-子代数. 若把 σ-代数定义的最后一条改为 $E_1,\cdots,E_n \in X \implies E_1\cup\cdots\cup E_n \in \mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是一个**代数**.

注记. σ-代数 $\mathcal{A}$ 中可数个元素的交集显然也在 $\mathcal{A}$ 中. 一个 X 的 σ-代数必然包括 $\varnothing$ 和 X.

例子. 若 $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ 是一族 X 的 σ-代数, 则 $\bigcap\limits_{i\in I}\mathcal{A}_i$ 也是 X 的 σ-代数.

定义 3.1.4. 若 $\mathcal{M}\subset 2^X$,

$$\sigma(\mathcal{M}) := \bigcap_{\mathcal{A}\text{是包含}\mathcal{M}\text{的}\sigma\text{-代数}} \mathcal{A}$$

称为**$\mathcal{M}$ 生成的σ-代数**. 即包含 $\mathcal{M}$ 的最小 σ-代数.

定义 3.1.5. 若 X 是拓扑空间, 则由 X 的所有开集生成的 σ-代数叫作 X 的 **Borel σ-代数**, 记为$\mathcal{B}(X)$ 或$\mathcal{B}_X$, 其中的元素称为 **Borel 集**.

例子. $[a,b)=(-\infty,b)\cap[a,+\infty)$ 是 $\mathbb{R}$ 的 Borel 集.

定义 3.1.6. 若 $(X,\mathcal{A}),(Y,\mathcal{B})$ 是测度空间,$f:X\to Y$ 是映射, 易知 $f^{-1}(\mathcal{B})=\{f^{-1}(E):E\in\mathcal{B}\}$ 是 X 上的 σ-代数. 若 $f^{-1}(\mathcal{B})\subset\mathcal{A}$, 我们说 f 是**可测的**.

注记. 显然, 若 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$ 可测, 则 $g\circ f:X\to Z$ 可测.

命题 3.1.7. 以上定义中, 若 $\mathcal{B}=\sigma(\mathcal{M})$, 则

$$f\text{可测}(\text{即}f^{-1}(\sigma(\mathcal{M}))\subset\mathcal{A})\Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{M})\subset\mathcal{A}$$

证明: "$\Rightarrow$" 显然; "$\Leftarrow$" 考虑 $\{E\subset Y: f^{-1}(E)\in\mathcal{A}\}$ 是 σ-代数且包含 $\mathcal{M}$, 因而它也包含 $\sigma(\mathcal{M})$. 故 $f^{-1}(\sigma(\mathcal{M}))\subset\mathcal{A}$. □

推论 3.1.8. 令 $f:X\to Y$ 为映射,$\mathcal{M}\subset 2^Y$, 则 $\sigma(f^{-1}(\mathcal{M}))=f^{-1}(\sigma(\mathcal{M}))$.

证明: 把前一命题中的 $f^{-1}(\mathcal{M})\subset\mathcal{A}\implies f^{-1}(\sigma(\mathcal{M}))\subset\mathcal{A}$, 取 $\mathcal{A}=\sigma(f^{-1}(\mathcal{M}))$ 得 $f^{-1}(\sigma(\mathcal{M}))\subset\sigma(f^{-1}(\mathcal{M}))$.

而由 $f^{-1}(\mathcal{M})\subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{M}))$ 以及 $f^{-1}(\sigma(\mathcal{M}))$ 是一个 σ-代数, 得 $\sigma(f^{-1}(\mathcal{M}))\subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{M}))$. □

定义 3.1.9. 若 $(X,\mathcal{A})$ 是测度空间,Y 是拓扑空间, 则映射 $f:X\to Y$ 称为**可测**若 $f:(X,\mathcal{A})\to(Y,\mathcal{B}_Y)$ 可测 (等价地 $f^{-1}(\{Y\text{的开子集}\})\subset\mathcal{A}$, 等价地 $f^{-1}(\{Y\text{的闭子集}\})\subset\mathcal{A}$).

命题 3.1.10. 若拓扑空间 Y 第二可数且 $\mathcal{U}$ 是 Y 的拓扑基, 则 $\sigma(\mathcal{U})$ 是 Y 的 Borel σ-代数 $\mathcal{B}_Y$.

证明: 令 $\mathcal{T}_Y$ 为 Y 的拓扑, 即 $\mathcal{T}_Y=\{Y\text{的开子集}\}$, 则 $\mathcal{U}\subset\mathcal{T}_Y$, 故 $\sigma(\mathcal{U})\subset\sigma(\mathcal{T}_Y)=\mathcal{B}_Y$.

任取 $W\in\mathcal{T}_Y$. 由 $\mathcal{U}$ 是拓扑基知 W 有开覆盖

$$W=\bigcup\{u\in\mathcal{U}:u\subset W\}$$

从而有可数子覆盖.(回忆 Y 第二可数 $\implies W$ 第二可数 $\implies W$ 是 Lindelöf 空间) 故 $W\in\sigma(\mathcal{U})$. 这证明了 $\mathcal{T}_Y\subset\sigma(\mathcal{U})$. 故 $\sigma(\mathcal{T}_Y)\subset\sigma(\mathcal{U})$. □

推论 3.1.11. 若 X 是测度空间,Y 是第二可数拓扑空间且 $\mathcal{U}$ 是 Y 的一个拓扑基. 则 $f:X\to Y$ 可测当且仅当 $\forall u\in\mathcal{U}$ 有 $f^{-1}(u)$ 是 X 的可测集.

例子. $\sigma(\{(a,+\infty):a\in\mathbb{Q}\})=\mathcal{B}_{\mathbb{R}}=\sigma(\{[a,+\infty):a\in\mathbb{Q}\})$.

证明: 令 $\mathcal{A}=\sigma(\{(a,+\infty):a\in\mathbb{Q}\})$. 则 $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. 故

$$\forall a\in\mathbb{R},[a,+\infty)=\bigcap_{\substack{b\in\mathbb{Q}\\ b<a}}(b,+\infty)\in\mathcal{A}$$
$$(a,+\infty)=\bigcup_{\substack{b\in\mathbb{Q}\\ b>a}}(b,+\infty)\in\mathcal{A}$$

故 $\forall b\in\mathbb{R}$ 有 $(-\infty,b)=\mathbb{R}\setminus[b,+\infty)\in\mathcal{A}$. 故 $(a,b)\in\mathcal{A}$.

由于 $\{(a,b):a<b,a,b\in\mathbb{R}\}$ 是 $\mathbb{R}$ 的拓扑基且 $\mathbb{R}$ 是第二可数的 (回忆第二可数 $\implies$ 可分, 可分度量 $\implies$ 第二可数) 故 $\{(a,b)\}$ 生成的 σ-代数就是 $\mathcal{B}_Y$. 故 $\mathcal{A}=\mathcal{B}_Y$.

$\sigma(\{[a,b):a\in\mathbb{Q}\})=\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ 的证明类似. □

我们定义 $[-\infty,+\infty]$ 上的拓扑使以下 f 是同胚:

$$f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-\infty,+\infty],\quad f(x)=\begin{cases}\tan x & (x\neq\pm\frac{\pi}{2})\\ -\infty & (x=-\frac{\pi}{2})\\ +\infty & (x=\frac{\pi}{2})\end{cases}$$

因此 $[-\infty,+\infty]$ 有拓扑基 $\{(a,b),[-\infty,c),(+\infty,d]:a,b,c,d\in[-\infty,+\infty]\}$.

命题 3.1.12. *以下集合每个都生成* $\mathcal{B}_{[-\infty,+\infty]}$.

- $\{(a,+\infty]:a\in\mathbb{Q}\}$
- $\{[a,+\infty]:a\in\mathbb{Q}\}$
- $\{[-\infty,a):a\in\mathbb{Q}\}$
- $\{[-\infty,a]:a\in\mathbb{Q}\}$

推论 3.1.13. *令 X 为测度空间, $f:X\to[-\infty,+\infty]$ 则以下等价:*

- f *可测*
- $\forall a\in\mathbb{Q},f^{-1}(a,+\infty]$ *可测*
- $\forall a\in\mathbb{Q},f^{-1}[a,+\infty]$ *可测*
- $\forall a\in\mathbb{Q},f^{-1}[-\infty,a)$ *可测*
- $\forall a\in\mathbb{Q},f^{-1}[-\infty,a]$ *可测*

注记. $f:X\to\mathbb{R}$ 有类似结论.

定义 3.1.14. 若 $(X,\mathcal{A})$ 是测度空间,$X' \subset X$, 则 $(X',\mathcal{A}|_{X'})$ 自然的是一个**子测度空间**, 这里 $\mathcal{A}|_{X'} = \{X' \cap E : E \in \mathcal{A}\}$. 等价地, 若令 $\iota : \begin{matrix} X' \to X \\ x \mapsto x \end{matrix}$ 为嵌入映射, 则 $\mathcal{A}|_{X'} = \iota^{-1}(\mathcal{A})$.

例子. *若 X 是拓扑空间,$X' \subset X$ 赋予子空间拓扑 (即其开集为 $X' \cap X$ 的开集) 则 $(X',\mathcal{B}_{X'})$ 是 $(X,\mathcal{B}_X)$ 的子测度空间, 即 $\mathcal{B}_{X'} = \mathcal{B}_X|_{X'}$.*

证明: 令 $\iota : X' \to X$ 为嵌入,$\mathcal{T}_X$ 为 X 的拓扑. 故 $\iota^{-1}(\mathcal{T}_X) = \mathcal{T}_{X'}$.

我们要证 $\iota^{-1}(\mathcal{B}_X) = \mathcal{B}_{X'}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{X'} &= \sigma(\mathcal{T}_{X'}) \\ &= \sigma(\iota^{-1}(\mathcal{T}_X)) \\ &= \iota^{-1}(\sigma(\mathcal{T}_X)) \\ &= \mathcal{B}_X|_{X'}\end{aligned}$$

□

命题 3.1.15. *令 X,Y 为测度空间,$Y' \subset Y$ 是子测度空间.f 满足 $f(X) \subset Y'$. 则以下等价:*

(1) $f : X \to Y$ 可测.

(2) f 的限制 $f' : X \to Y'$ 可测.

证明: 嵌入映射 $\iota : Y' \to Y$ 可测, 故由 $f = \iota \circ f'$ 知 f' 可测 $\implies f$ 可测.

记 Y 的 σ-代数为 $\mathcal{A}$. 则 Y' 的 σ-代数为 $\mathcal{A}|_{Y'} = \iota^{-1}(\mathcal{A})$. 假设 f 可测. 任取 $\mathcal{A}|_{Y'}$ 中元素 $E \cap Y', E \in \mathcal{A}$. 则 $(f')^{-1}(E \cap Y') = f^{-1}(E)$ 可测. 故 f' 可测. □

例子. *若 X 为测度空间,$A \subset X$, 则 A 可测当且仅当 $\chi_A : X \to \{0,1\}$ 可测.*

证明: $\chi_A^{-1}\{1\} = A, \chi_A^{-1}\{0\} = X \setminus A, \chi_A^{-1}\{\varnothing\} = \varnothing, \chi_A^{-1}\{0,1\} = X$ 都可测当且仅当 A 可测. □

定义 3.1.16. 若 X,Y 是拓扑空间, 映射 $f : X \to Y$ 称为 **Borel(可测) 映射**, 若 $f : (X,\mathcal{B}_X) \to (Y,\mathcal{B}_Y)$ 可测. 显然,f 连续 $\implies f$ Borel 可测.

命题 3.1.17. *令 X 为测度空间,$f = (f_1,\cdots,f_N) : X \to \mathbb{R}^N$ 可测当且仅当每个 $f_i : X \to \mathbb{R}$ 可测.*

证明: 令 $p_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, (x_1,\cdots,x_N) \mapsto x_i$, 则 $f_i = p_i \circ f$. 考虑 p_i 连续从而 Borel 可测, 故 f 可测 $\implies f_i$ 可测.

反之, 假设 $f_1,\cdots,f_N$ 可测. 由于形如 $I_1 \times \cdots \times I_N$ 的 $\mathbb{R}^N$ 子集 (这里 $I_i = (a_i,b_i)$) 构成 $\mathbb{R}^N$ 的拓扑基, 故生成 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$. 而

$$f^{-1}(I_1 \times \cdots \times I_N) = f_1^{-1}(I_1) \cap \cdots \cap f_N^{-1}(I_N)$$

故 f 可测. □

推论 3.1.18. 若 $f,g:X\to\mathbb{C}$ 可测, 则 $f+g, f\cdot g$ 可测. 若 g 处处非零, 则 $\dfrac{f}{g}$ 可测.

证明:

$$F:X\to\mathbb{C}\times\mathbb{C}, x\mapsto(f(x),g(x))$$

可测. 且

$$\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C},(z_1,z_2)\mapsto z_1+z_2$$

连续 (故 Borel 可测). 故二者的复合 $f+g$ 可测. 类似地 fg 可测.

若 g 处处非零, 则由

$$g:X\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$$

可测和

$$\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C},z\mapsto\frac{1}{z}$$

连续知 $\dfrac{1}{g}$ 可测. 故 $\dfrac{f}{g}$ 可测. □

命题 3.1.19. 令 X 为测度空间,$\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 为一列可测函数.$f_n:X\to[-\infty,+\infty]$, 则 $\sup\limits_n f_n, \inf\limits_n f_n$, $\limsup\limits_n f_n, \liminf\limits_n f_n$ 可测.

证明: 我们只讨论 sup 和 lim sup. 令 $F(x)=\sup\limits_n f_n(x)$. 则

$$\forall a\in\mathbb{Q}, F^{-1}([-\infty,a])=\bigcap_n f_n^{-1}([-\infty,a])$$

可测. 故 F 可测. 类似地,$\inf\limits_n f_n$ 可测.

$$\limsup_n f_n(x)=\limsup_n\{f_k:k\geqslant n\}=\inf_n F_n(x)$$

这里 $F_n=\sup\limits_{k\geqslant n} f_k$ 可测. 故 $\limsup\limits_n f_n$ 可测. □

推论 3.1.20. 若 $f_n:X\to[-\infty,+\infty]$ 是一列可测函数且逐点收敛到 $f:X\to[-\infty,+\infty]$, 则 f 可测.

3.2 Lebesgue 测度

回忆我们想用函数和积分来表示 $C([0,1])$ 在 L^p 范数 $(1\leqslant p<+\infty)$ 下的完备化 $L^p([0,1])$ 以及其对偶空间, 并且希望函数的逐点收敛能一定程度地表示 L^p 范数下的收敛和弱 $*$-收敛. 这意味着我们关心何时 $\lim\limits_n\displaystyle\int f_n=\int\lim\limits_n f_n$. 我们处理这一问题的方式是先证明一个特例, 再由这一特例来证明一般情况. 这一特例是: 若 $A_1,A_2,\cdots\subset[0,1]$ 可测且两两不相交, 令 $f_n=\chi_{A_1\cup\cdots\cup A_n}=\chi_{A_1}+\cdots+\chi_{A_n}$, 则 $\lim\limits_n\displaystyle\int f_n=\int\lim\limits_n f_n$. 意味着 $\displaystyle\sum_n\mu(A_n)=\mu\left(\bigcup_n A_n\right)$.

定义 3.2.1. 令 $(X, \mathcal{A})$ 为测度空间, 函数 $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ 称为**测度**若满足

- $\mu(\varnothing) = 0$.
- **可数可加性 (countable additivity)**. 若 $\{E_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \subset \mathcal{A}$ 两两不相交, 则 $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

我们也称 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 或 (X, μ) 是**测度空间**.

例子. 令 X 是集合,$\forall E \subset X$, 令

$$\mu(E) = \sum_{x \in E} 1 = \begin{cases} |E| & (E\text{有限}) \\ 0 & (E\text{无限}) \end{cases}$$

$(X, 2^X, \mu)$ 是测度空间.μ 称为**计数测度 (counting-measure)**.

命题 3.2.2. 令 (X, μ) 为测度空间.

1. 若 $E_1, \cdots, E_n \subset X$ 可测且两两不交, 则 $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(E_i)$.
2. **单调性**

   若 $E \subset F \subset X$ 可测, 则 $\mu(E) \leqslant \mu(F)$.
3. 若 $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots \subset X$ 可测, 则 $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \mu(E_n)$.
4. 若 $X \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ 可测且 $\mu(E_1) < +\infty$, 则 $\mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \mu(E_n)$.
5. **次可加性 (subadditivity)**

   若 $\{E_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ 可测, 则 $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

证明: 1. 令 $E_{n+1} = E_{n+2} = \cdots = \varnothing$ 并用可数可加性.

2. $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \geqslant \mu(E)$.

3. 令 $F_1 = E_1, F_n = E_n \setminus E_{n-1} (n \geqslant 2)$, 则

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_n E_n\right) &= \mu\left(\bigcup_n F_n\right) = \sum_n \mu(F_n) \\ &= \lim_{n \to \infty} \mu(F_1) + \cdots + \mu(F_n) \\ &= \lim_{n \to \infty} \mu(F_1 \cup \cdots \cup F_n) \\ &= \lim_{n \to \infty} \mu(E_n) \end{aligned}$$

4. 令 $F_n = E_1 \setminus E_n$, 则 $\mu(F_n) \leqslant \mu(E_1) < +\infty$. 由 3 知

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} (\mu(E_1) - \mu(E_n))$$

又

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \mu\left(E_1 \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)\right) = \mu\left(E_1\right) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

故 $\mu(E_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} (\mu(E_1) - \mu(E_n))$.

5. 假设 $\mu\left(E_1 \cup \cdots \cup E_n\right) \leq \mu\left(E_1\right) + \cdots + \mu\left(E_n\right)$, 则

$$\begin{aligned}\mu\left(E_1 \cup \cdots \cup E_{n+1}\right) &= \mu\left(E_1 \cup \cdots \cup E_n\right) + \mu\left(E_{n+1} \setminus E_1 \cup \cdots \cup E_n\right) \\ &\leqslant \mu\left(E_1\right) + \cdots + \mu\left(E_n\right) + \mu\left(E_{n+1}\right)\end{aligned}$$

故由归纳法,$\forall n$ 有 $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j)$.

对 n 取极限并利用 3, 得 $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$.

□

定义 3.2.3. 若 (X,μ) 的可测集 $E \subset X$ 满足 $\mu(E) = 0$ 则称 E 是**零测集**. 若某个命题在 X 的一个零测集外成立, 我们说它**几乎处处 (a.e.) 成立**.

定义 3.2.4. 我们说测度空间 (X,μ) 是**完备的**若 X 的 (可测的) 零测集的任意子集都可测 (从而由单调性是零测的).

定理 3.2.5. 令 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 为测度空间. 令

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= \{F \subset X : 存在零测 \widetilde{F} \subset \mathcal{A} 使 F \subset \widetilde{F}\} \\ \overline{\mathcal{A}} &= \{E \cup F : E \in \mathcal{A}, F \in \mathcal{N}\}\end{aligned}$$

则 $\overline{\mathcal{A}}$ 是一个 σ-代数, 且 μ 能唯一地扩张成 $\overline{\mathcal{A}}$ 上的一个测度 $\overline{\mu}$, 且 $\overline{\mu}$ 完备. 我们称 $(X,\overline{\mathcal{A}},\overline{\mu})$ 是 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 的**完备化**.

证明: 显然 $\varnothing \in \overline{\mathcal{A}}$.

若 $E_1, E_2, \cdots \in \mathcal{A}, F_1, F_2, \cdots \in \mathcal{N}$, 则 $\bigcup\limits_n E_n \in \mathcal{A}, \bigcup\limits_n F_n \in \mathcal{N}$. 故 $\bigcup\limits_n (E_n \cup F_n) \in \overline{\mathcal{A}}$. 因此 $\overline{\mathcal{A}}$ 对可数并是封闭的. 若 $E \in \mathcal{A}, F \in \mathcal{N}$, 取 $\widetilde{F} \in \mathcal{A}$ 是 $\mu(\widetilde{F}) = 0$ 且 $F \subset \widetilde{F}$, 则

$$(E \cup F)^{\complement} = (E \cup \widetilde{F})^{\complement} \cup (\widetilde{F} \setminus (E \cup F))$$

而 $E \cup \widetilde{F}^{\complement} \in \mathcal{A}, \widetilde{F} \setminus (E \cup F) \in \mathcal{N}$, 故 $(E \cup F)^{\complement} \in \overline{\mathcal{A}}$, 从而 $\overline{\mathcal{A}}$ 是 σ-代数.

$\overline{\mu}$ 的唯一性:

若 $E \in \mathcal{A}, F \in \mathcal{N}$, 则

$$\overline{\mu}(E \cup F) = \overline{\mu}(E) + \overline{\mu}(F \setminus E) = \mu(E) + \overline{\mu}(F \setminus E)$$

这里, 取 $\widetilde{F} \in \mathcal{A}$ 零测使 $F \subset \widetilde{F}$. 由 $\overline{\mu}$ 单调性,

$$0 \leqslant \overline{\mu}(F \setminus E) \leqslant \overline{\mu}(\widetilde{F}) = \mu(\widetilde{F}) = 0$$

故 $\overline{\mu}(E \cup F) = \mu(E)$.

$\overline{\mu}$ 的存在性:

我们定义 $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{A}} \to [0, +\infty]$ 为 $\overline{\mu}(E \cup F) = \mu(E)$, 若 $E \in \mathcal{A}, F \in \mathcal{N}$. 这是良定义的: 若 $E' \in \mathcal{A}, F' \in \mathcal{N}$ 且 $E \cup F = E' \cup F'$, 取零测 $\widetilde{F}, \widetilde{F'}$ 使 $F \subset \widetilde{F}, F' \subset \widetilde{F'}$, 则 $E \subset E' \cup \widetilde{F'}$. 故

$$\mu(E) \leqslant \mu(E' \cup \widetilde{F'}) \leqslant \mu(E') + \mu(\widetilde{F'}) = \mu(E')$$

类似地,$\mu(E') = \mu(E)$. 得证.

显然 $\overline{\mu}(\varnothing) = 0$ 和 $\overline{\mu}$ 的可数可加性易得. 显然 $\overline{\mu}$ 完备. □

我们接下来构造 $\mathbb{R}^N$ 上的 Lebesgue 测度.

令 X 为 LCH(局部紧的 Hausdorff 空间).X 的任意闭子集显然 LCH. 回忆若 $V \subset X$ 是开集,$K \subset V$ 是紧集, 则存在开集 U 在 X 中有紧闭包 $\overline{U}$ 使 $K \subset U \subset \overline{U} \subset X$.

定义 3.2.6. 若 $V \subset X$ 是开集，记$\boldsymbol{f \prec V}$ 若 $f \in C_c(X), 0 \leqslant f \leqslant 1$ 且 $\operatorname{supp}(f) \subset V$. 若 $K \subset X$ 是紧集，记$\boldsymbol{K \prec f}$ 若 $f \in C_c(X), 0 \leqslant f \leqslant 1$, 且 $f|_K = 1$.

回忆上学期证过:

定理 3.2.7 (Urysohn 引理)**.** *令 X 为 LCH 空间，$V \subset X$ 是开集 (注意 V 也是 LCH 的),$K \subset V$ 为紧集，则存在 f 使 $K \prec f \prec V$.*

定理 3.2.8 (单位分解定理)**.** *令 X 为 LCH 空间，$K \subset X$ 为紧集，开集 $U_1, \cdots, U_n \subset X$ 满足 $K \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n$, 则存在 K 在 $U_1, \cdots, U_n$ 下的单位分解 $h_1, \cdots, h_n$. 即 $h_1, \cdots, h_n \in C_c(X, [0,1])$ 满足:*

(1) $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$ *有* $h_i \prec U_i$.

(2) $K \prec \sum_{i=1}^{n} h_i$.

对任意 $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$, 定义 Riemann 积分

$$\int_{\mathbb{R}^N} f = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f \, dx_1 \cdots dx_N$$

注意:$\int : C_c(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ 是**正线性泛函**. 即它是 $\mathbb{C}$-线性的. 且 $f \geqslant 0 \implies \int f \geqslant 0$. 由此可得

$$f \leqslant g \implies \int f \leqslant \int g$$

我们将只用 $\int$ 是正线性泛函这一点来构造 Lebesgue 测度.

定义 3.2.9. 若 $U \subset \mathbb{R}^N$ 是开集，定义其 Lebesgue 测度为

$$m(U) = \sup\{\int_{\mathbb{R}^N} f : f \prec U\}$$

并令 $m(\varnothing) = 0$. 我们在上学期作业 11 中证明过:

单调性 若 $U \subset V$ 为开集, 则 $m(U) \leqslant m(V)$.

次可加性 若 $(U_i)_{i\in I}$ 是一族 $\mathbb{R}^N$ 开子集, 则有 $m\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) \leqslant \sum_{i\in I} m(U_i)$.

定义 3.2.10. 对任意 $E \subset \mathbb{R}^N$,

$$m^*(E) = \inf\{m(U) : E \subset U \subset \mathbb{R}^N\}$$

称为 E 的 **Lebesgue 外测度 (outer measure)**. 显然对开集有 $m = m^*$.

我们的目标是去证明 m^* 是 $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N})$ 上的测度，并将其记为 m. 特别地, 若 $E, F \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$ 不相交, 我们希望证明

$$m^*(E \cup F) = m^*(E) + m^*(F)$$

这对于任意不相交的 $\mathbb{R}^N$ 子集不成立 (Banach-Tarski 定理). 对于一般集合, 我们只有如下性质:

定义 3.2.11. 令 X 为集合, 函数 $\mu^* : 2^X \to [0, +\infty]$ 称为**外测度**若以下条件满足:

- $\mu^*(\varnothing) = 0$.
- 单调性:$\forall E, F \subset X$, 若 $E \subset F$, 则 $\mu^*(E) \leqslant \mu^*(F)$.
- 次可加性: 令 $(E_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 为 X 的一列子集, 则 $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$.

引理 3.2.12. *m^* 是以上意义下的外测度.*

证明: 单调性显然. 令 $(E_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 为一列 X 的子集.$\forall \varepsilon > 0$, 取开集 $U_n, E_n \subset U_n \subset \mathbb{R}^N$, 满足

$$m(U_n) \leqslant m^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

则由 m 在开集上的次可加性

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &\leqslant m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m\left(U_n\right) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m^*\left(E_n\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} m^*\left(E_n\right) + \varepsilon. \end{aligned}$$

由 ε 的任意性得证. □

我们来证明特殊版本的 $m^*(E\sqcup F)=m^*(E)+m^*(F)$(若 $E,F\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$).

例子. 若 $U,V\subset\mathbb{R}^N$ 是开集, 则 $m^*(V)=m^*(V\cap U)+m^*(V\setminus U)$.

证明: 由 m^* 的次可加性, "$\leqslant$" 成立. 故只需假设 $m^*(V)<+\infty$ 并证明 $m^*(V)\geqslant m^*(V\cap U)+m^*(V\setminus U)$. 由单调性,$V\cap U$ 和 $V\setminus U$ 有有限 m^* 值

$$m^*(V\cap U)=m(V\cap U)=\sup\{\int f:f\prec V\cap U\}$$

故只需证明 $\forall f\prec V\cap U$ 有

$$m(V)\geqslant\int f+m^*(V\setminus U)$$

即可.

令 $K=\operatorname{supp}(f),W=V\setminus K$. 则 W 是包含 $V\setminus U$ 的开集. 只需证明

$$m(V)\geqslant\int f+m(W)$$

而 $m(W)=\sup\{\int g:g\prec W\}$ 且 $\forall g\prec W$, 有 $f+g\prec V$. 故

$$m(V)\geqslant\int f+\int g$$

取 $\sup\limits_{g\prec W}$ 得

$$m(V)\geqslant\int f+m(W)$$

□

例子. 令 $E\subset\mathbb{R}^N$, 令 $U\subset\mathbb{R}^N$ 是开集, 则 $m^*(E)=m^*(E\cap U)+m^*(E\setminus U)$.

证明: 由 m^* 的次可加性, 只需假设 $m^*(E)<+\infty$, 并证 $m^*(E)\geqslant m^*(E\cap U)+m^*(E\setminus U)$

$$m^*(E)=\inf\{m(V):V\text{为开集},V\supset E\}$$

$\forall$ 开集 $V\supset E$. 由前一例以及 m^* 单调性

$$m^*(V)\geqslant m^*(U\cap V)+m^*(V\setminus U)\geqslant m^*(E\cap U)+m^*(E\setminus U)$$

取 $\inf\limits_{V\supset E,V\text{开集}}$ 完成证明. □

定义 3.2.13. 令 μ^* 是集合 X 的一个外测度. 我们说子集 $A\subset X$ 是**μ^*-可测**或***Carathéodory* 可测**若对任意 $E\subset X$ 都有

$$\mu^*(E)=\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\setminus A)$$

因此 $\mathbb{R}^N$ 的任意开子集都是 m^*-可测的.

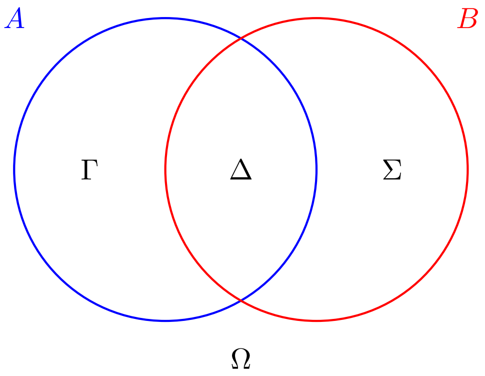
注记. 显然 A 是 μ^*-可测的 $\Leftrightarrow A^{\complement}$ 是 μ^*-可测的.

我们应当把 "μ^*-可测" 看作不只是关于 A, 而是关于 A 和 $A^{\complement}$ 的共同性质. 或者说，从直观上，是关于 A 和 $A^{\complement}$ 的 "共同边界" 的性质. 这个边界把任意 $E\subset X$ 分成两部分:$E\cap A$ 和 $E\cap A^{\complement}$, 并且这一分割在 μ^*-外测度下是良好的，即满足

$$\mu(E)=\mu(E\cap A)+\mu(E\cap A^{\complement})$$

我们通过一个例子来感受 μ^*-可测的好处.

例子. 令 $A, B \subset X$ 为 μ^*-可测子集. 则 A, B 将 X 分成四个子集的不交并 $X = \Gamma \cup \Delta \cup \Sigma \cup \Omega$. 其中



$$
\begin{aligned}
\Gamma &= A \setminus B \\
\Delta &= A \cap B \\
\Sigma &= B \setminus A \\
\Omega &= X \setminus (A \cup B)
\end{aligned}
$$

则 $\Gamma, \Delta, \Sigma, \Omega$ 任意几个的不交并的 μ^*-外测度都能写成这些对应成员的 μ^*-外测度的和. 例如 (我们记 (A) 代表 "由于 A 是 μ^*-可测" ,(B) 代表 "由于 B 是 μ^*-可测"):

$$
\begin{aligned}
\mu^*(A) &\overset{(B)}{=} \mu^*(\Gamma) + \mu^*(\Delta) \\
\mu^*(B) &\overset{(A)}{=} \mu^*(\Delta) + \mu^*(\Sigma) \\
\mu^*(A^\complement) &\overset{(B)}{=} \mu^*(\Sigma) + \mu^*(\Omega) \\
\mu^*(A \cup B) &\overset{(A)}{=} \mu^*(A) + \mu^*(\Sigma) = \mu^*(\Gamma) + \mu^*(\Delta) + \mu^*(\Sigma) \\
\mu^*(X) &\overset{(A)}{=} \mu^*(A) + \mu^*(A^\complement) = \mu^*(\Gamma) + \mu^*(\Delta) + \mu^*(\Sigma) + \mu^*(\Omega)
\end{aligned}
$$

由此可得

$$
\mu^*(X) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(\Omega) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(X \setminus (A \cup B))
$$

我们总结两式, 记 $\mathcal{M} = \{A \subset X : A\text{是}\mu^*\text{可测的}\}$.

引理 3.2.14. 若 $A, B \in \mathcal{M}$, 则 $\mu^*(X) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(X \setminus (A \cup B))$, 且若 $A \cap B = \varnothing$ 则 $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

定义 3.2.15. 若 $E \subset X$, 定义 $\mu_E^* : 2^E \to [0, +\infty]$, 若 $F \subset E$ 则 $\mu_E^*(F) = \mu^*(F)$.μ_E^* 称为 μ^* 在 2^E 上的**限制**.

命题 3.2.16. 若 $A \subset X$ 是 μ^*-可测的, 则 $\forall E \subset X, A_E = E \cap A$ 是 μ_E^*-可测的.

证明: 对任意的 $F \subset E$,

$$
\begin{aligned}
\mu_E^*(F \cap A_E) + \mu_E^*(F \setminus A_E) &= \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F \setminus A) \\
&= \mu^*(F) \\
&= \mu_E^*(F)
\end{aligned}
$$

□

推论 3.2.17. $\mathcal{M}$ 是代数, 且 μ^* 在 $\mathcal{M}$ 上满足 (有限) 可加性: 若 $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{M}$ 两两不交则

$$\mu^*(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i)$$

证明: 可加性已证. 若 $A, B \in \mathcal{M}, \forall E \subset X$, 则 $A_E = A \cap E$ 和 $B_E = B \cap E$ 是 μ_E^*-可测. 故由前一引理,

$$\mu_E^*(E) = \mu_E^*(A_E \cup B_E) + \mu_E^*(E \setminus (A_E \cup B_E))$$

即

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap (A \cap B)) + \mu^*(E \setminus (A \cup B))$$

故 $A \cup B \in \mathcal{M}$. □

引理 3.2.18. 令 $A_1, A_2, A_3, \cdots \in \mathcal{M}$ 两两不相交. 令 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. 则 $\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ 且 $\mu^*(X) = \mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A)$.

证明: 由可加性

$$\mu^*(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mu^*(A_1) + \cdots + \mu^*(A_n)$$

且

$$\mu^*(X) = \mu^*(A_1 \cup \cdots \cup A_n) + \mu^*(X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_n))$$

故

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mu^*(A_1) + \cdots + \mu^*(A_n)$$

对任意 n 成立, 从而 $\mu^*(A) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$. 故 $\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

因此,

$$\mu^*(X) \geqslant \mu^*(A_1) + \cdots + \mu^*(A_n) + \mu^*(X \setminus A)$$

取 $n \to \infty$ 得

$$\mu^*(X) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \mu^*(X \setminus A) = \mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A)$$

□

定理 3.2.19 (Carathéodory 定理)**.** 令 μ^* 是集合 X 上的外测度. 则 $\mathcal{M} = \{X\text{的所有}\mu^*\text{-可测子集}\}$ 是一个 σ-代数, 且 μ^* 是 $\mathcal{M}$ 上的一个完备测度, 记作 μ.

证明: 我们已证 $\mathcal{M}$ 是代数且 μ^* 满足可数可加性, 令 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M}$. 令

$$B_1 = A_1, B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

由 $\mathcal{M}$ 是代数和 $B_1, B_2, \cdots \in \mathcal{M}$. 故 $\forall E \subset X$,$B_n \cap E$ 是 μ_E^*-可测. 令 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, 则 $A \cap E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap E)$. 由前一引理

$$\mu_E^*(E) = \mu_E^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap E)\right) + \mu_E^*\left(E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap E)\right)$$

即

$$\mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(E \setminus A)$$

故 A 是 μ^*-可测的. 因此 $\mathcal{M}$ 是 σ-代数.

若 $A \in \mathcal{M}, \mu^*(A) = 0, B \subset A$, 则 $\forall E \subset X$ 有

$$\mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \setminus B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(E) = \mu^*(E)$$

故 $B \in \mathcal{M}$. 故 μ^* 在 $\mathcal{M}$ 上完备. □

推论 3.2.20. *$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$ 中任意元素都 m^*-可测, 其完备化 $\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}}$ 中的元素称为* **Lebesgue 可测集**. *$m = m^*|_{\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}}}$ 称为* **Lebesgue 测度**.*m 在任意有界可测子集 $A \subset \mathbb{R}^N$ 上取值有限.*

证明: 只剩下证明 $m(A) < +\infty$. 取开长方体 $R = I_1 \times \cdots \times I_N$ 包含 A, 则 $m(A) \leqslant m(R)$. 对任意 $f \prec R$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f = \int_{I_1} \cdots \int_{I_N} f \leqslant |I_1| \cdots |I_N|$$

故 $m(R) \leqslant |I_1| \cdots |I_N| < +\infty$ □

显然 Lebesgue 可测 $\implies$ m^*-可测. “$\Longleftarrow$” 事实上也成立.

3.3 非负函数的积分

令 $(X, (A), \mu)$ 为测度空间. 我们先来定义非负简单函数的积分, 约定 $0 \cdot (+\infty) = 0$

定义 3.3.1. 若 $s : X \to [0, +\infty)$ 形如

$$s = a_1\chi_{E_1} + \cdots + a_n\chi_{E_n}, a_1, \cdots, a_n \in [0, +\infty), E_1, \cdots, E_n \text{可测}$$

则称 s 为**简单函数**. 等价地,s 是简单函数 $\Leftrightarrow$ s 可测且 $s(X)$ 是有限集. 我们能把 s 写成 $s = a_1\chi_{E_1} + \cdots + a_n\chi_{E_n}$ 满足可测集 $E_1, \cdots, E_n$ 两两不相交. 定义

$$\int_X s d\mu = \sum_i a_i \mu(E_i)$$

引理 3.3.2. *若 $s = \sum_i a_i\chi_{E_i} = \sum_j b_j\chi_{E_j}$ (有限和), 且每个 E_i, F_j 可测, 假设 $\forall i \neq i', j \neq j'$ 有 $E_i \cap E_{i'} = F_j \cap F_{j'} = \varnothing$. 则 $\sum_i a_i\mu(E_i) = \sum_j b_j\mu(F_j)$.*

证明: 令 $E_0 = X \setminus \bigcup_i E_i$, 则

$$s = 0 \cdot \chi_{E_0} + \sum_i a_i\chi_{E_i}$$

且 $0 \cdot \chi_{E_0} + \sum_i a_i\chi_{E_i} = \sum_i a_i\chi_{E_i}$. 因此, 通过把 $s = \sum_i a_i\chi_{E_i}$ 换成 $0 \cdot \chi_{E_0} + \sum_i a_i\chi_{E_i}$ 可不妨假设 $X = \bigsqcup_i E_i$. 类似地, 假设 $X = \bigsqcup_j F_j$. 则

$$\sum_i a_i\mu(E_i) = \sum_i a_i \sum_j \mu(E_i \cap F_j) = \sum_{i,j} a_i\mu(E_i \cap F_j)$$

类似地

$$\sum_j b_j \mu(F_j) = \sum_{i,j} b_j \mu(F_i \cap F_j)$$

若 $\mu(E_i \cap F_j) \neq 0$, 取 $x \in E_i \cap F_j$, 则若 $i \neq i'$ 或 $j \neq j'$ 则 $x \notin E_{i'} \cap F_{j'}$. 故 $s(x) = a_i = b_j$.

因此 $\sum\limits_i a_i \mu(E_i) = \sum\limits_j b_i \mu(F_j)$. □

引理 3.3.3. 令 $s, t : X \to [0, +\infty)$ 为简单函数.c 为任意非负实数, 则

- $\int_X cs = c \int_X s$
- $\int_X (s + t) = \int_X s + \int_X t$

证明: 显然 $\int_X cs = c \int_X s$.

若 $s, t : X \to \mathbb{C}$ 为简单函数, 则可把 s, t 写成有限和 $s = \sum a_i E_i$ 以及 $t = \sum b_i E_i$, 这里 $E_1, E_2, \cdots$ 可测且两两不交. 故

$$\int_X (s + t) = \sum (a_i + b_i)\mu(E_i) = \sum a_i \mu(E_i) + \sum b_i \mu(E_i) = \int_X s + \int_X t.$$

□

推论 3.3.4. 若 $s, t : X \to [0, +\infty)$ 是简单函数且 $s \leqslant t$, 则 $\int_X s \leqslant \int_X t$

证明: $\int_X t = \int_X s + \int_X (t - s) \geqslant \int_X s$. □

令$\boldsymbol{L^+(X) = L^+}$= {可测函数$f : X \to [0, +\infty]$}

定义 3.3.5. 若 $f \in L^+$, 定义:

$$\int_X f d\mu = \sup\{\int_X s d\mu : s : X \to [0, +\infty)\text{为简单函数且}s \leqslant f\}$$

显然, 当 $f \in L^+$ 是简单函数时, 这里积分的定义与之前的定义相同.

若 $A \subset X$ 可测, 定义:

$$\int_A f d\mu = \int_A f|_A d\mu$$

不难得知,

$$\int_A f|_A d\mu = \int_X f \cdot \chi_A d\mu$$

且 $f \leqslant g \implies \int f \leqslant \int g$.

命题 3.3.6. 对任意的 $f \in L^+$,

$$\int_X f = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \quad \text{a.e.}(\text{即}\mu\{\mathrm{x} \in \mathrm{X} : \mathrm{f(x)} > 0\} = 0)$$

证明: 记 $A = \{x \in X : f(x) > 0\}$. 若 $\mu(A) = 0$, 则对任意简单函数 $s : X \to [0, +\infty], 0 \leqslant s \leqslant f$, 记 $s = \sum_i a_i \chi_{E_i}$. 则 $s = \sum_i a_i \chi_{E_i \cap A}$. 而 $\mu(E_i \cap A) \leqslant \mu(A) = 0$. 故

$$\int_X s d\mu = \sum_i a_i \mu(E_i \cap A) = 0$$

故 $\int_X f d\mu = 0$.

反之, 假设 $\mu(A) > 0$, 令 $A_n = \{x \in X : f(x) > \frac{1}{n}\}$, 则 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. 故 $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$. 故存在 n 使 $\mu(A_n) > 0$. 由 $f \geqslant \frac{1}{n}\chi_{A_n}$ 知

$$\int_X f d\mu \geqslant \frac{1}{n}\mu(A_n) > 0.$$

□

类似地:

命题 3.3.7. 若 $f \in L^+$ 满足 $\int_X f < +\infty$, 则 $f < +\infty \quad \text{a.e.}$

证明: 令 $A = \{x \in X : f(x) = +\infty\}$, 则 $\forall n \in \mathbb{N}$ 有 $f \geqslant n \cdot \chi_A$. 故

$$\int_X f d\mu \geqslant n \cdot \mu(A)$$

故若 $\mu(A) \geqslant 0$, 则 $\int_X f d\mu = +\infty$. □

定理 3.3.8 (单调收敛定理 (monotone convergence theorem/Beppo Levi theorem))**.** 令 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是 L^+ 中一列元素满足 $f_n \leqslant f_{n+1}(\forall n)$. 令 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{Z}_+\}$, 则

$$\int_X f = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n$$

证明: 因为 $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \cdots$, 故 $\int_X f_n d\mu$ 关于 n 递增. 故 $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n$ 在 $[0, +\infty]$ 中存在. 对任意的 n, 有 $f_n \leqslant f$, 故 $\int_X f_n \leqslant \int_X f$. 故

$$\int_X f \geqslant \lim_{n\to\infty} \int_X f_n$$

要证 $\int_X f \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_X f_n$, 只需对任意简单函数 $s : X \to [0, +\infty)$ 满足 $s \leqslant f$ 来证明 $\int_X s \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_X f_n$. 只需对 $\forall 0 < r < 1$ 证明

$$\int_X rs = r\int_X s \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_X f_n$$

故通过把 s 换成 rs, 我们不妨假设 $\forall x \in X$ 有

$$s(x)>0 \implies s(x)<f(x)$$

令 $Y=\{x\in X: s(x)>0\}$, 则 $x\in Y \implies s(x)<f(x)$. 只需证 $\int_Y s \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}\int_Y f_n$.

对任意的 n, 令 $A_n=\{x\in Y: f_n(x)>s(x)\}$, 则 $Y=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, 故 $\mu(Y)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)$. 我们有:

$$\int_Y s=\lim_{n\to\infty}\int_{A_n} s=\lim_{n\to\infty}\int_Y \chi_{A_n}\cdot s$$

(记有限和 $s=\sum\limits_i a_i\chi_{E_i}, E_i\subset Y$ 可测. 则由 $E_i=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_i\cap A_n$ 知 $\mu(E_i)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_i\cap A_n)$. 故

$$\int_Y s=\sum_i a_i\mu(E_i)=\lim_{n\to\infty}\sum_i a_i\mu(E_i\cap A_n)=\lim_{n\to\infty}\int_Y \chi_{A_n}\cdot s)$$

而 $\chi_{A_n}\cdot s\leqslant f_n$, 从而

$$\int_Y \chi_{A_n}\cdot s\leqslant\int_Y f_n$$

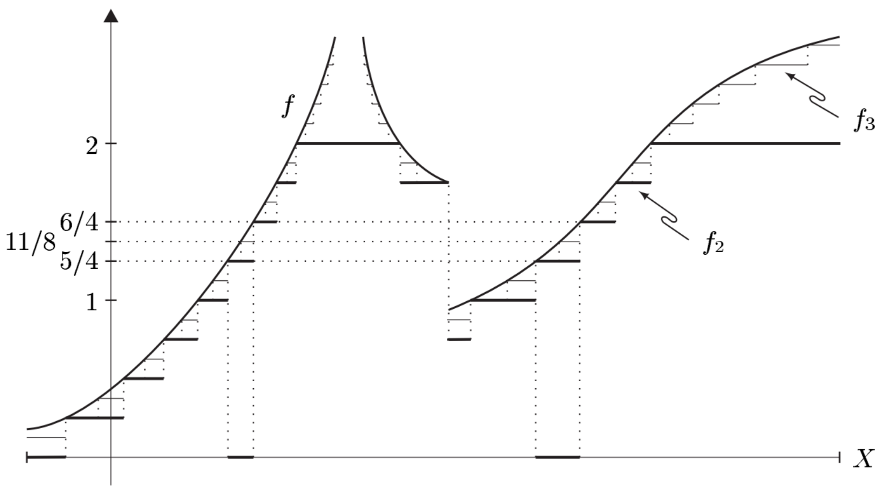
取 $n\to\infty$ 得 $\int_Y s\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\int_Y f_n$. □

命题 3.3.9. 对任意 $f\in L^+$, 存在递增简单函数列 $s_n: X\to[0,+\infty)$ 满足

$$\forall x\in X, f(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)$$

证明: 先假设 $f(X)\subset[0,+\infty)$, 对任意 n, 令

$$s_n(x)=\begin{cases}\dfrac{k}{2^n} & (\text{若}\dfrac{k}{2^n}\leqslant f(x)<\dfrac{k+1}{2^n},\\ & \quad k=0,1,2,\cdots,4^n)\\ 0 & (\text{若}2^n+2^{-n}\leqslant f(x))\end{cases}$$



即若 $A_k=\{x\in X:\dfrac{k}{2^n}\leqslant f(x)<\dfrac{k+1}{2^n}\}$(它可测), 则

$$s_n=\sum_{k=0}^{4^n}\frac{k}{2^n}\cdot\chi_{A_k},\forall x\in X$$

若 $f(x)\geqslant 2^n+2^{-n}$, 则显然 $s_n(x)=0\leqslant s_{n+1}(x)$.
若 $\dfrac{k}{2^n}\leqslant f(x)<\dfrac{k+1}{2^n}$, 则 $\dfrac{2k}{2^{n+1}}\leqslant f(x)<\dfrac{2k+2}{2^{n+1}}$, 故 $s_{n+1}(x)\geqslant\dfrac{2k}{2^{n+1}}=s_n(x)$.

因此 $s_n(x)$ 关于 n 递增, 且有

$$|f(x)-s_n(x)|\leqslant\frac{1}{2^n}(若f(x)\leqslant 2^n+2^{-n})$$

因此 $s_n(x)$ 关于 n 递增且 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n(x)=f(x)$.

一般地, 若 $f(X)\subset[0,+\infty]$, 令 $A=f^{-1}([0,+\infty))$, 令 $t_n:X\to[0,+\infty)$ 为简单函数且逐点递增收敛于 $f\cdot\chi_A$. 则

$$s_n=t_n+n\cdot\chi_{X\setminus A}$$

为所求函数列. □

命题 3.3.10. 若 $f,g\in L^+,c\geqslant 0$, 则

- $\displaystyle\int cf=c\int f$
- $\displaystyle\int(f+g)=\int f+\int g$

证明: 取简单递增函数列 $s_n,t_n:X\to[0,+\infty)$ 满足:

$$\forall x\in X,\lim_{n\to\infty}s_n(x)=f(x),\lim_{n\to\infty}t_n(x)=g(x)$$

我们证过 $\displaystyle\int(s_n+t_n)=\int s_n+\int t_n$. 两边取极限并由单调收敛定理得

$$\int(f+g)=\int f+\int g$$

$\displaystyle\int cf=c\int f$ 的证明类似. □

推论 3.3.11. 若 $A,B\subset X$ 可测且不相交,$f\in L^+$, 则

$$\int_{A\cup B}f=\int_A f+\int_B f$$

证明:

$$\int_{A\cup B}f=\int_X\chi_{A\cup B}\cdot f=\int_X\chi_A\cdot f+\int_X\chi_B\cdot f=\int_A f+\int_B f$$

□

推论 3.3.12. 若 $f_1, f_2, \cdots \in L^+$, 则

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n$$

证明: 令 $g_n = f_1 + \cdots + f_n, g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$. 则

$$\begin{aligned}\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \int_X g = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n &= \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_1 + \cdots + \int_X f_n \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\end{aligned}$$

□

注记. 单调收敛定理对应了

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

以下命题对应了

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \supset A_2 \supset \cdots \\ \mu(A_1) < \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

命题 3.3.13. 若可测函数列 $f_n : X \to [0, +\infty]$ 关于 n 递减且 $\int_X f_1 < +\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n$$

证明: 令 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, 则 $\int f_n + \int (f_1 - f_n) = \int f_1 = \int f + \int (f_1 - f)$. 这五项中每一项都不超过 $\int_X f_1$ 属于 $[0, +\infty)$. 且 $\{f_1 - f_n\}$ 关于 n 递增. 故由单调收敛定理,

$$\lim_{n\to\infty} \int (f_1 - f_n) = \int (f_1 - f)$$

代回上式知

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$$

□

注记. 若 $\int_X f_1 = +\infty$ 则以上结论可能不成立, 例如

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[n,+\infty)} = +\infty$$

但 $\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \chi_{[n,+\infty)} = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0$.

命题 3.3.14. 令 $\{f_n\} \subset L^+$. 令 $\left(\sup_n f_n\right)(x) = \sup_n f_n(x)$, $\left(\inf_n f_n\right)(x) = \inf_n f_n(x)$, 则

$$\sup_n \int_X f_n \leqslant \int_X \sup_n f_n \text{以及} \inf_n \int_X f_n \geqslant \int_X \inf_n f_n$$

(注意特例 $\sup_n(a_n + b_n) \leqslant \sup_n a_n + \sup_n b_n, \inf_n(a_n + b_n) \geqslant \inf_n a_n + \inf_n b_n$*)*

证明: 令 $\varphi(x) = \sup_n f_n(x), \psi(x) = \inf_n f_n(x)$, 则对任意 n 有

$$\int_X f_n \leqslant \int_X \varphi \text{以及} \int_X f_n \geqslant \int_X \psi$$

分别取 $\sup_n$ 和取 $\inf_n$ 即可. □

引理 3.3.15 (Fatou 引理)**.** 令 $\{f_n\} \subset L^+$, 则

(1) $\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \geqslant \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n$

(2) 若 $\int_X \sup_n f_n < +\infty$, 则 $\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \leqslant \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n$

(回忆若 $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ 则 $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geqslant n} a_k\right)$ 以及 $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geqslant n} a_k\right)$*)*

证明: 我们只证明 (2),(1) 是类似的.

$\forall n$, 令 $g_n(x) = \sup_{k\geqslant n} f_k(x)$, 则 $\int_X g_1 < +\infty$, 且 g_n 关于 n 递增, 故

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n = \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n$$

而

$$\int_X g_n = \int_X \sup_{k\geqslant n} f_k \geqslant \sup_{k\geqslant n} \int_X f_k$$

取极限得 $\lim_{n\to\infty} \int_X g_n \geqslant \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n$. □

注记. 一般 Fatou 引理仅指 (1), 因为 (2) 可由 (1) 推得.

推论 3.3.16 (Lebesgue 控制收敛定理的非负版本)**.** 令 $\{f_n\} \subset L^+$ 逐点收敛到 $f : X \to [0, +\infty]$. 若存在 $g \in L^+$ 满足 $\int_X g < +\infty$ 且 $\forall n$ 有 $f_n \leqslant g$, 则 $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n$ 存在且等于 $\int_X \lim_{n\to\infty} f_n$.

证明: 由 Fatou 引理 (1), (2),

$$\begin{aligned}
\int_X \lim_{n\to\infty} f_n &= \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \\
&\leqslant \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \leqslant \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n \\
&\leqslant \int_X \lim_{n\to\infty} f_n
\end{aligned}$$

因此上式中不等号均为等号. □

3.4 复值函数的积分

令 (X,μ) 为测度空间.

定义 3.4.1. 令 $f : X \to \mathbb{R}$ 可测. 令

$$f^+ = \sup\{f(x), 0\}, f^- = f^+ - f = \sup\{-f(x), 0\}$$

分别称为 f 的**正部**和**负部**. 注意 $|f| = f^+ + f^-$. 我们说 f **可积**, 若 $\int_X |f| < +\infty$. 此时我们定义

$$\int_X f = \int_X f^+ - \int_X f^-$$

记 $L^1(X,\mathbb{R}) = L^1(X,\mu,\mathbb{R}) = \{\text{可积}f : X \to \mathbb{R}\}$.

命题 3.4.2. $L^1(X,\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$-线性空间, 且映射

$$\int_X : f \in L^1(X,\mathbb{R}) \mapsto \int_X f d\mu \in \mathbb{R}$$

是线性的.

证明: 若 $a, b \in \mathbb{R}, f, g \in L^1(X,\mathbb{R})$, 则

$$\int_X |af + bg| \leq \int_X (|a| \cdot |f| + |b| \cdot |g|) = |a| \int_X |f| + |b| \int_X |g| < +\infty$$

因此 $af + bg \in L^1(X,\mathbb{R})$.

若 $a \geqslant 0$, 则

$$\begin{aligned}\int_X af &= \int_X (af)^+ - \int_X (af)^- = \int_X af^+ - \int_X af^- \\ &= a\left(\int_X f^+ - \int_X f^-\right) = a\int_X f\end{aligned}$$

显然 $\int_X -f = \int_X f^- - \int_X f^+ = -\int_X f$, 因此

$$\int_X -af = -\int_X af = -a\int_X f$$

故 $\int_X af = a\int_X f$ 对任意 $a \in \mathbb{R}$ 成立.

令 $h = f+g$, 故 $h^+ - h^- = h = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$, 也即 $h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$. 故

$$\begin{aligned}\int_X h^+ + \int_X f^- + \int_X g^- &= \int_X h^- + \int_X f^+ + \int_X g^+ \\ \int_X h^+ - \int_X h^- &= \int_X f^+ - \int_X f^- + \int_X g^+ - \int_X g^-\end{aligned}$$

故 $\int_X h = \int_X f + \int_X g$. □

定义 3.4.3. 若 $f: X \to \mathbb{C}$ 可测 (等价地,$\mathrm{Re} f$,$\mathrm{Im} f$ 可测, 从而 $|f| = \sqrt{\mathrm{Re}\, f^2 + \mathrm{Im}\, f^2}$ 可测) 则称 f **可积**若 $\int_X |f| < +\infty$(注意由 $|\mathrm{Re}\, f|, |\mathrm{Im}\, f| \leqslant |f| \leqslant |\mathrm{Re}\, f| + |\mathrm{Im}\, f|$ 知 f 可积 $\iff \mathrm{Re}\, f$ 和 $\mathrm{Im}\, f$ 都可积). 令

$$\int_X f = \int_X \mathrm{Re}\, f + i \int_X \mathrm{Im}\, f$$

令 $L^1(X) = L^1(X, \mathbb{C}) = L^1(X, \mu, \mathbb{C}) = \{\text{可积} f : X \to \mathbb{C}\}$.

注记. 由于 $\int_X$ 有界, 且其算子范数 $\leqslant 1$. 故 $\|\int\|_{L^1} = \int_X |f| d\mu$ 是“半范数”. 定义随后给出.

若 V 是 $\mathbb{C}$-线性空间,$\Lambda : V \to \mathbb{R}$ 是实线性算子, 则

$$\Phi : V \to \mathbb{C}, v \mapsto \Lambda(v) - i\Lambda(iv)$$

是 $\mathbb{C}$-线性的. 若 V 是赋范线性空间, 则 $\|\Lambda\| = \|\Phi\|$.Φ 是 Λ 的复化 $\Lambda(v) = \mathrm{Re}\Phi(v)$. 即对 $r \geqslant 0$,$\forall u$ 有

$$\underline{\text{若}|\Lambda(u)| \leqslant r\|u\|, \text{则}|\Phi(u)| \leqslant r\|u\|}$$

(分析一作业 12 补充题 9)

定义 3.4.4. 映射 $\|\cdot\| : V \to [0, +\infty)$ 称为**半范数**若 $\forall a \in \mathbb{C}, \forall u, v \in V$ 有:

- $\|au\| = |a| \cdot \|u\|$
- $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$

(即它和范数相比少了 $\|u\| = 0 \implies u = 0$)

注记. 下划线式子对于 $\|\cdot\|$ 是半范数时也成立. 事实上, 取 $\theta \in \mathbb{R}$ 使 $e^{i\theta}\Phi(u) \in \mathbb{R}$, 则 $\|\Phi(u)\| = \|\Phi(e^{i\theta}u)\| \leqslant r\|e^{i\theta}u\| = r\|u\|$.

命题 3.4.5. $L^1(X)$ 是 $\mathbb{C}$-线性空间且 $\|f\|_1 = \|f\|_{L^1} = \int_X |f|$ 定义了 $L^1(X)$ 上的半范数. 即满足 $\forall a \in \mathbb{C}, \forall f, g \in L^1(X)$ 有

$$\|af\|_1 = |a| \cdot \|f\|_1, \|f + g\|_1 \leqslant \|f\|_1 + \|g\|_1$$

且映射

$$\int_X : L^1(X) \to \mathbb{C}, f \mapsto \int_X f$$

是 $\mathbb{C}$-线性的.

证明: 对任意 $a \in \mathbb{C}, f, g \in L^1(X)$,

$$\|f + g\|_1 = \int_X |f + g| \leqslant \int_X (|f| + |g|) = \int_X |f| + \int_X |g| = \|f\|_1 + \|g\|_1 < +\infty$$
$$\|af\|_1 = \int_X |af| = |a| \int_X f = |a| \cdot \|f\|_1 < +\infty$$

故 $L^1(X)$ 是 $\mathbb{C}$-线性映射且 $\|\cdot\|_1$ 是半范数.

$\Lambda : L^1(X) \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_X \mathrm{Re} f$ 是 $\mathbb{R}$-线性的. 而

$$\begin{aligned}\Lambda(f) - i\Lambda(if) &= \int_X \mathrm{Re}\, f - i\int_X \mathrm{Re}(if) \\ &= \int_X \mathrm{Re}\, f - i\int_X (-\,\mathrm{Im}\, f) = \int_X f\end{aligned}$$

故 $f \mapsto \int_X f$ 是 $\mathbb{C}$-线性的. □

命题 3.4.6. $\forall f \in L^1(X)$ 有 $|\int_X f| \leqslant \int_X |f|$.

证明: 为证明 $|\Phi(f)| \leqslant \|f\|_{L^1}$, 只需证明 $|\Lambda(f)| \leqslant \|f\|_{L^1}$. 而

$$\begin{aligned}|\Lambda(f)| &= \left|\int_X \mathrm{Re}\, f\right| \\ &= \left|\int_X \mathrm{Re}\, f^+ - \int_X \mathrm{Re}\, f^-\right| \\ &\leqslant \int_X \mathrm{Re}\, f^+ + \int_X \mathrm{Re}\, f^- = \int_X \mathrm{Re}\, f^+ + \mathrm{Re}\, f^- \\ &= \int_X |\,\mathrm{Re}\, f| \leqslant \int_X |f| \\ &= \|f\|_{L^1}\end{aligned}$$

因此即有 $\left|\int_X f\right| \leqslant \int_X |f|$. □

注记. 若 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{C}$-线性空间 V 上的半范数, 则

$$V_0 = \{v \in V : \|v\| = 0\}$$

是 V 的线性子空间. 则 $(V/V_0, \|\cdot\|)$ 是一个赋范 $\mathbb{C}$-线性空间. 这里 $v \in V$ 则 $\|v + V_0\| := \|v\|$.

我们常把 $(V, \|\cdot\|)$ 和 $(V/V_0, \|\cdot\|)$ 看作一样的对象.

例子. 若 $V = L^1(X, \mu)$, 半范数取作 $\|\cdot\|_{L^1}$, 则对 $f \in V$ 有

$$\|f\|_{L^1} = 0 \iff \int_X |f| = 0 \iff f = 0 \quad \text{a.e.}$$

令 $V_0 = \{f \in L^1(X, \mu) : f = 0 \quad \text{a.e.}\}$. 则 $(V/V_0, \|\cdot\|_{L^1})$ 是赋范线性空间.

事实上, 我们常常把 $L^1(X, \mu)$ 看作 V/V_0. 即 $L^1(X, \mu)$ 中元素是可积的 $f : X \to \mathbb{C}$ 地等价类, 等价关系为 $g \sim f \iff g = f \quad \text{a.e.}$

则 $\int_X : L^1(X, \mu) \to \mathbb{C}$ 有算子范数 $\leqslant 1$.

定理 3.4.7 (控制收敛定理 (Dominated Convergence Theorem)). 令 $\{f_n\} \subset L^1(X,\mu)$, 几乎处处收敛到可测的 $f: X \to \mathbb{C}$(即在一个零测集 A 外 f_n 逐点收敛到 f) 且存在 $g \in L^1(X,\mu), g \geqslant 0$ 满足 $\forall n$ 有 $|f_n| \leqslant g \quad$ a.e. 则

$$f \in L^1(X,\mu) \text{且} \int_X f = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n$$

证明: 取零测集 $A, B_1, B_2, \cdots$, 在 A 外 $f_n \to f$, 在 B_n 外 $|f_n| \leqslant g$. 则

$$C = A \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right)$$

是零测集. 令 $Y = X \setminus C$. 那么在 Y 上 $|f| = \lim\limits_{n\to\infty} |f_n| \leqslant g$. 故

$$\int_X |f| = \int_Y |f| \leqslant \int_X g < +\infty$$

只需证 $\displaystyle\int_Y f = \lim_{n\to\infty} \int_Y f_n$. 我们证明过当 $f_n \geqslant 0$ 时这成立. 现在对于一般情况令 $h_n = f - f_n$. 注意

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \leqslant g(x)$$

故 $|h_n| \leqslant 2g$. 故

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |h_n| = \int_X \lim_{n\to\infty} |h_n| = 0$$

而 $\displaystyle\left|\int_X h_n\right| \leqslant \int_X |h_n|$, 故 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X h_n = 0$.

这就证明了 $\displaystyle\int_Y f = \lim_{n\to\infty} \int_Y f_n$. □

命题 3.4.8. 假设 $\mu(X) < +\infty, (f_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{I}}$ 是 $L^1(X,\mu)$ 中的网且一致收敛到可测的 $f: X \to \mathbb{C}$, 则

$$f \in L^1(X,\mu) \text{且} \lim_\alpha \int_X f_\alpha = \int_X f$$

证明:

$$\lim_\alpha \int_X |f - f_\alpha| \leqslant \lim_\alpha \mu(x) \|f - f_\alpha\|_{l^\infty} = 0$$

故存在 α 使 $\displaystyle\int_X |f - f_\alpha| < +\infty$, 故

$$\int_X |f| \leqslant \int_X |f - f_\alpha| + \int_X |f_\alpha| < +\infty$$

从而 $f \in L^1(X)$, 且

$$|\int_X f - \int_X f_\alpha| \leqslant \int_X |f - f_\alpha| \to 0$$

□

注记. 用以上命题和 Egoroff 定理可以证明控制收敛定理.

补充 (证明见第四次作业):

定理 3.4.9 (Egoroff 定理). 假设 μ 是有限测度, 即 $\mu(X) < +\infty$. 假设函数列 $\{f_n\}$ 逐点收敛. 证明对任意 $\delta > 0$ 都存在 X 的可测子集 A 满足 $\mu(X \setminus A) \leqslant \delta$ 且 $\{f_n\}$ 在 A 上一致收敛.

3.5 L_p 空间

令 (X,μ) 为测度空间. 考虑满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 的 $p,q\in[1,+\infty]$. 若 $f:X\to\mathbb{C}$ 或 $f:X\to[0,+\infty]$. 若 $p<+\infty$ 令

$$\|f\|_{L^p}=\|f\|_p=\left(\int_X|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

命题 3.5.1. 假设 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, 1<p<+\infty. f,g\in L^+(X)$. 则有

- *Hölder* 不等式 $\int_X fg\leqslant\|f\|_p\cdot\|g\|_q$
- *Minkowski* 不等式 $\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$

证明: 若 f,g 是特征函数 $X\to[0,+\infty)$. 记 $f=\sum a_i\chi_{E_i}, g=\sum b_i\chi_{E_i}$, 这里 $E_i\cap E_j=\varnothing$ 若 $i\neq j$. 且 (由 $\int|f|^p,\int|g|^p<+\infty$) 可假设 $\mu(E_i)<+\infty. fg=\sum a_ib_i\chi_{E_i}$. 由有限求和的 Hölder 不等式:

$$\begin{aligned}\int_X fg&=\sum_i a_ib_i\mu(E_i)\\&=\sum_i a_i\mu\left(E_i\right)^{\frac{1}{p}}\cdot b_i\mu\left(E_i\right)^{\frac{1}{q}}\\&\leqslant\left(\sum_i a_i^p\mu\left(E_i\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_i b_i^q\mu\left(E_i\right)\right)^{\frac{1}{q}}\\&=\|f\|_p\cdot\|g\|_q\end{aligned}$$

一般情况下, 取递增简单函数列 $s_n,t_n:X\to[0,+\infty), s_n\to f, t_n\to g$. 则由单调收敛定理,

$$\begin{aligned}\int_X fg&=\lim_{n\to\infty}\int_X s_nt_n\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\int_X s_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_X t_n^q\right)^{\frac{1}{q}}\\&=\left(\int_X f^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_X g^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

Hölder 不等式得证.Minkowski 不等式的证明类似. □

因此, 若 $f,g\in X\to\mathbb{C}$ 可测, 则

- Hölder 不等式 $\left|\int fg\right|\leqslant\int|fg|\leqslant\|f\|_p\cdot\|g\|_q$
- Minkowski 不等式 $\|f+g\|_p\leqslant\||f|+|g|\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$

显然若 $a\in\mathbb{C}$ 则 $\|af\|_p=|a|\cdot\|f\|_p$. 因此

$$L^p(X,\mu)=\{\text{可测}f:X\to\mathbb{C}:\int_X|f|^p<+\infty\}$$

是 $\mathbb{C}$-线性空间, 且 $\|\cdot\|_p$ 是 $L^p(X,\mu)$ 上的半范数. 显然

$$\|f\|_p=0\Longleftrightarrow f=0\quad\text{a.e.}$$

因此, 若把 $L^p(X,\mu)$ 中元素看作满足 $\int_X |f|^p < +\infty$ 的可测 $f: X \to \mathbb{C}$ 所处的"几乎处处相等等价类", 则 $\|\cdot\|_p$ 是 $L^p(X,\mu)$ 上的范数.

我们常把 $L^p(X,\mu)$ 看成这些等价类构成的集合.

注记. $\|f\|_p$ 指 $\|f\|_{L^p}$, 除非测度是计数测度, 否则 $\|f\|_{l^p}$ 不会写成 $\|f\|_p$.

定理 3.5.2 (Riesz-Fischer 定理)**.** *令 $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, 则 $L^p(X,\mu)$ 完备. 且若 $\{f_n\}$ 在 $L^p(X,\mu)$ 中 (L^p 范数下) 收敛到 $f \in L^p(X,\mu)$, 则 $\{f_n\}$ 有子列 a.e. 收敛到 f.*

注记. (1) 若 f_n 在 L^p 范数下收敛到 $f, g \in L^p(X,\mu)$, 则 $\|f-g\|_p = 0$, 故 $f = g$ a.e.

(2) 若度量空间 Y 中点列 $\{y_n\}$ 是 Cauchy 列, 且有子列收敛到 y, 则 $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

(3) L^∞ 的定义及证明稍后给出. 并且当 $p = +\infty$ 时有 $\{f_n\}$a.e. 收敛到 f.

证明: 我们先证 $1 \leqslant p < +\infty$ 的情况. 取 $L^p(X,\mu)$ 中的 Cauchy 列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. 构造子列 $\{f_{n_k}\}$ 如下: 令 $n_1 = 1$. 若 $n_1 < \cdots < n_{k-1}$ 已选好 $(n > 1)$. 取 $n_k > n_{k-1}$ 使

$$\forall m \geqslant n_k \text{有} \|f_m - f_{n_k}\| \leqslant \frac{1}{2^k}$$

这样取得的子列 $\{g_k = f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 满足 $\|g_{k+1} - g_k\| \leqslant \frac{1}{2^k}$. 我们下证明 g_k 几乎处处收敛.

令 $h_1 = g_1, h_2 = g_2 - g_1, h_3 = g_3 - g_2, \cdots$, 则 $g_k = h_1 + h_2 + \cdots h_k$. 要证 $\sum_{k=1}^{\infty} h_k$ 几乎处处收敛, 只需证 $\sum_{k=1}^{\infty} |h_k|$ 几乎处处收敛. 注意 $\|h_k\|_p \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} (k \geqslant 2)$, 由单调收敛定理,

$$\begin{aligned}
\int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} |h_k|\right)^p &= \int_X \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |h_k|\right)^p = \lim_{n\to\infty} \int_X \left(\sum_{k=1}^{n} |h_k|\right)^p = \lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=1}^{n} |h_k|\right\|_p^p \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} \left(\|h_1\| + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)^p \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

故 $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |h_k|\right)^p < +\infty$ a.e.

令 $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x)$(若收敛, 不收敛则令 $f(x) = 0$), 则

$$\|f\|_p^p = \int_X \left|\sum_{k=1}^{\infty} h_k\right|^p \leqslant \int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} |h_k|\right)^p < +\infty$$

最后, 用类似的计算可得

$$\begin{aligned}
\|f - g_m\|_p^p = \left\|\sum_{k=m+1}^{\infty} h_k\right\|_p^p &\leqslant \int \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |h_k|\right)^p \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)^p = \left(\frac{1}{2^{m-1}}\right)^p \to 0
\end{aligned}$$

故 $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$. □

我们来讨论 L^∞ 空间. 若 $f: X \to \mathbb{C}$ 可测, 令

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{a \geqslant 0 : \mu(\{|f| > a\}) = 0\}$$

注意 $\|f\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{l^\infty}$, 且若 $f = g \quad \text{a.e.}$, 则 $\|f\|_{L^\infty} = \|g\|_{L^\infty}$, 但 $\|f\|_{l^\infty}$ 与 $\|g\|_{l^\infty}$ 不一定相同. 对测度空间,$\|f\|_\infty$ 一般指 $\|f\|_{L^\infty}$. 当 μ 是计数测度时 $l^\infty = L^\infty$.

引理 3.5.3. 令 $b = \|f\|_{L^\infty}$, 则 $\mu(\{|f| > b\}) = 0$. 特别地 $\|f\|_{L^\infty} = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \quad \text{a.e.}$

证明: 由

$$\{|f| > b\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \{|f| > b + \frac{1}{n}\}$$

和 μ 的次可数可加性易得. □

注记. 以上引理告诉我们,$b = \|f\|_{L^\infty}$ 是最小的满足 $\mu\{x \in X : |f(x)| > b\} = 0$ 的非负数. 令 $A = \{x \in X : |f(x)| \leqslant \|f\|_{L^\infty}\}$, 则 $\|f|_A\|_{l^\infty} = \|f\|_{L^\infty}$.

引理 3.5.4. 令 $\{f_n\}$ 为一列可测函数 $f_n : X \to \mathbb{C}$, 则以下等价:

(1) $\lim\limits_{n \to \infty} \|f_n\|_{L^\infty} = 0$.

(2) 存在可测子集 $A \subset X$ 满足 $\mu(X \setminus A) = 0$ 且 $\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{x \in A} |f_n(x)| = 0$.

证明: (2) $\implies$ (1) 是显然的,(1) $\implies$ (2): 假设 (1), 令

$$A_n = \{x \in X : |f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_{L^\infty}\}$$

则 $\mu(X \setminus A_n) = 0$. 令 $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. 则

$$\mu(X \setminus A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X \setminus A_n) = 0$$

且 $\lim\limits_{n \to \infty} \|f_n\|_{l^\infty(A)} = 0$. □

定义 3.5.5. 令

$$L^\infty(X, \mu) = \{\text{可测} f : X \to \mathbb{C}, \|f\|_{L^\infty} < +\infty\}$$

则 $\forall f \in L^\infty(X, \mu)$, 存在 $A \subset X$ 可测使

$$\|f|_A\|_{l^\infty(A)} = \|f\|_{L^\infty}$$

由此易知 $\|\cdot\|_{L^\infty}$ 是 $L^\infty(X, \mu)$ 上的半范数.

若令 $L^\infty(X, \mu)$ 中元素为满足 $\|f\|_{L^\infty} < +\infty$ 的 f 的等价类, 其中

$$f\text{与}g\text{等价} \Longleftrightarrow \|f - g\|_{L^\infty} = 0 \Longleftrightarrow f = g \quad \text{a.e.}$$

则 $\|\cdot\|_{L^\infty}$ 是 L^∞ 上的一个范数.

Riesz-Fischer 定理 $L^\infty(X,\mu)$ *版证明:* 令 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 为 $L^\infty(X,\mu)$ 中 Cauchy 列. 对任意 $m,n\in\mathbb{Z}_+$, 取

$$A_{m,n}=\{x\in X:\|f_m(x)-f_n(x)\|\leqslant\|f_m-f_n\|_{L^\infty}\}$$

令 $A=\bigcap\limits_{m,n}A_{m,n}$, 则 $\mu(X\setminus A)=0$.

则 $\{f_n|_A\}$ 是 $l^\infty(A)$ 中的 Cauchy 列. 故在 l^∞ 范数下收敛到

$$f\in l^\infty, f:A\to\mathbb{C}\text{可测}$$

即 $\|f_n-f\|_\infty=0$. 对于 $x\in X\setminus A$, 令 $f(x)=0$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f\quad$ a.e. 且 $f\in L^\infty(X,\mu)$. □

命题 3.5.6. *令 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 则对任意 $f\in L^p(X,\mu)$, 存在 $L^p(X,\mu)$ 内简单函数列 $s_n:X\to\mathbb{C}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f-s_n\|_p=0$.(即简单函数在 L^p 空间内稠密)*

证明: 通过考虑 $\mathrm{Re}f,\mathrm{Im}f$, 只需证 $f:X\to\mathbb{R}$ 的情形. 考虑 $f^+,f^-\in L^p(X,\mu)$, 只需证 f^+,f^- 能被简单函数逼近. 故不妨设 $f\geqslant 0$.

若 $1\leqslant p<+\infty$, 取递增简单函数列 $s_n:X\to[0,+\infty), s_n\longrightarrow f$, 则 $0\leqslant s_n\leqslant f$. 故

$$\int|s_n|^p\leqslant\int|f|^p<+\infty$$

$s_n\in L^p(X,\mu)$, 且 $|f-s_n|^p\leqslant f^p\in L^1(X,\mu)$, 故由控制收敛定理知:

$$\lim_{n\to\infty}\int|f-s_n|^p=\int\lim_{n\to\infty}|f-s_n|^p=0$$

若 $p=+\infty$, 令 $\|f\|_{L^\infty}=M$. 令 $s_n(x)=\dfrac{i}{n}M$ 若 $\dfrac{i}{n}M\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{i+1}{m}M(0\leqslant i\leqslant n)$, 其它区域 $s(x)$ 取为 0. 则

$$\lim_{n\to\infty}\|f-s_n\|_{L^\infty}=0$$

□

注记. $L^2(X,\mu)$ 的 L^2 范数由内积 $\langle f,g\rangle=\int_X f\overline{g}$ 诱导 $(f,g\in L^2)$. 这里 $f\overline{g}\in L^1(X,\mu)$, 因为由 Hölder 不等式

$$\int_X|f\overline{g}|\leqslant\sqrt{\int_X|f|^2}\cdot\sqrt{\int_X|g|^2}=\|f\|_2\cdot\|g\|_2<+\infty$$

因此 $\int_X f\overline{g}$ 可定义. 故在此内积下 $L^2(X,\mu)$ 是 Hilbert 空间. 由 Riesz-Fréchet 定理

$$f\in L^2(X,\mu)\mapsto\Psi_f\in L^2(X,\mu)^*,\Psi_f(g)=\int_X g\overline{f}$$

是反线性酉算子, 即**反酉算子 (anti unitary)**. 故

$$f\in L^2(X,\mu)\mapsto\int_X(\quad)\cdot f\in L^2(X,\mu)^*$$

是酉算子. 简单来说,

$$L^2(X,\mu)\cong L^2(X,\mu)^*$$

在这个意义下,$L^2(X,\mu)$ 的弱拓扑和弱 $*$ 拓扑 (作为 $L^2(X,\mu)$ 的对偶空间) 等价.

定义 3.5.7. 一个测度空间 (X,μ) 的可测子集 E 称为 σ-有限的, 若 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$, 其中 $\{E_n\}$ 是一列 E 的可测子集, 且对任意 n 有 $\mu(E_n)<+\infty$.(注意通过把 E_n 换成 $\bigcup_{i=1}^{n}E_i$, 我们总能再要求 $E_1\subset E_2\subset\cdots$)

更一般地, 若 $1<p\leqslant+\infty, 1\leqslant q<+\infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 则有等距线性同构

$$L^p(X,\mu)\cong L^q(X,\mu)^*$$

(当 $p=\infty, q=1$ 时需假设 X 是 σ-有限的) 这个证明不容易. 我们只会讨论一些重要特例.

我们说过, 研究测度论的一个目标是用函数列逐点收敛来刻画 L^p 收敛和弱 $*$ 收敛. 我们先看 L^2 的情况.

- 逐点收敛 $\implies$ L^2 收敛

  直接利用单调/控制收敛证明 $\int|f_n-f|^p\to 0$.

- 逐点收敛 $\implies$ 弱 $*$ 收敛

  定理 3.5.8. *令 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 为 $L^2(X,\mu)$ 中 L^2 有界的函数列. 假设 f_n a.e. 逐点收敛到 $f:X\to\mathbb{C}$, 则 $f\in L^2(X,\mu)$ 且 f_n 弱收敛到 f.*

  注记. $L^2(X,\mu)$ 中的弱收敛函数列一定 L^2-有界. 这来源于泛函中所谓**一致有界定理**.

- 弱 $*$ 收敛 $\implies$ L^2 收敛

  若 $\{f_n\}\subset L^2(X,\mu), f\in L^2(X,\mu)$ 且 $f_n\xrightarrow{w}f, \lim_{n\to\infty}\int|f_n|^2=\int|f|^2$, 则 $f_n\to f$.

  注记. 这是根据一般 Hilbert 空间中, 网 ξ_α 收敛到 $\xi\iff\xi_\alpha\xrightarrow{w}\xi$且$\|\xi_\alpha\|\to\|\xi\|$.

- L^2 收敛 $\implies$ 逐点收敛

  L^2 收敛函数列一定有子列 a.e. 收敛

类似地, 逐点收敛 $\implies$ L^1 收敛可由控制收敛定理,L^1 收敛 $\implies$ 逐点收敛和 L^2 类似.

我们接下来讨论一般的 L^p 空间的对偶关系.

命题 3.5.9. *令 $1\leqslant p<+\infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 对任意 $f\in L^p(X,\mu)$, 令*

$$\Lambda_f:L^q(X,\mu)\to\mathbb{C}, \Lambda_f(g)=\int_X fg\,d\mu$$

则 $\Lambda_f\in L^q(X,\mu)^*$, 且 $\Lambda:L^p(X,\mu)\to L^q(X,\mu)^*, f\mapsto\Lambda_f$ 是等距线性映射.(当 $p=+\infty, q=1, X$ 是 σ-有限时以上结论也对)

证明: 若 $f\in L^p(X,\mu), g\in L^q(X,\mu)$, 则由 Hölder 不等式

$$\|fg\|_{L^1}\leqslant\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$$

故 $|\Lambda_f(g)|\leqslant\int_X|fg|\leqslant\|f\|_p\|g\|_q$. 故 $\|\Lambda_f\|\leqslant\|f\|_p$. 注意 Hölder 和 Minkowski 不等式对 $p=1, q=\infty$ 也成立.

Case 1:$1<p<+\infty, 1<q<+\infty$, 取可测函数 $u: X \to S^1=\{z:|z|=1\}$ 使 $uf=|f|$. 令 $g=u\cdot|f|^{p-1}$ 故 $fg=|f|^p\in L^1(X,\mu)$. 故

$$\|g\|_q^q=\int_X |g|^q=\int_X |f|^{pq-q}=\int_X |f|^p=\|f\|_p^p$$

故 $\|g\|_q=\|f\|_p^{p-1}$. 而

$$\Lambda_f(g)=\int_X fg=\int_X |f|^p=\|f\|_p^p=\|f\|_p\cdot\|g\|_q$$

故 $\|\Lambda_f\|=\|f\|_p$.
Case 2:$p=1, q=\infty$, 令 $g=u|f|^{p-1}=u$, 则 $\|g\|_\infty=1$, 而

$$\Lambda_f(g)=\int_X |f|=\|f\|_1=\|f\|_1\cdot\|g\|_\infty$$

故 $\|\Lambda_f\|=\|f\|_p$.
Case 3:$p=\infty, q=1$. 要证 $\|\Lambda_f\|\geqslant\|f\|_\infty$, 只需证 $\forall 0\leqslant a<\|f\|_\infty$, 有 $\|\Lambda_f\|\geqslant a$ 即可. 令

$$A=\{x\in X:|f(x)|>a\}$$

则 $\mu(A)>0$. 因 X 是 σ-有限的, 故 A 也 σ-有限. 因此存在可测集 $B\subset A, 0<\mu(B)<+\infty$. 令 $|f|=uf, u: X\to S^1$ 可测,$g=u\chi_B$, 则 $\|g\|_{L^1}=\mu(B)<+\infty$, 有

$$\Lambda_f(g)=\int_B |f|\geqslant a\cdot\mu(B)=a\cdot\|g\|_{L^1}$$

故 $\|\Lambda_f\|\geqslant a$. □

推论 3.5.10. 令 $1\leqslant p\leqslant+\infty, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$($p=+\infty$ 时假设 X 是 σ-有限的). 令 $f\in L^p(X,\mu)$. 若 $\forall g\in L^q(X,\mu)$ 都有 $\displaystyle\int_X fg d\mu=0$, 则 $f=0 \quad$ a.e.

证明:

$$\Lambda_f: L^q(X,\mu)\to\mathbb{C}, g\mapsto\int_X fg d\mu$$

是等距线性映射. 由假设,$\Lambda_f=0$, 故 f 是 $L^p(X,\mu)$ 中的零元素. 故 $f=0 \quad$ a.e. □

定义 3.5.11. 令 $1<p\leqslant+\infty$.($p=+\infty$ 时假设 X 是 σ-有限的) 我们说 $L^p(X,\mu)$ 中的网 $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ **弱 $*$-收敛**到 $f\in L^p(X,\mu)$, 若把 $L^p(X,\mu)$ 看作 $L^q(X,\mu)^*$ 闭线性子空间后在 $L^q(X,\mu)^*$ 的弱 $*$-拓扑下收敛. 即 $\forall g\in L^q(X,\mu)$ 有 $\displaystyle\lim_\alpha\int_X f_\alpha g=\int_X fg$. 当 $1<p<+\infty$ 时, 弱 $*$-收敛也称为**弱收敛**, 这是因为 $(L^p)^*\cong L^q$. (一般地,Banach 空间 V 中的网 (v_α) 称为**弱收敛**到 $v\in V$, 若 $\forall\varphi\in V^*$ 有 $\lim\limits_\alpha\varphi(v_\alpha)=\varphi(v)$)

注记. 对 Banach 空间 V,V^* 的范数收敛强于弱 $*$-收敛. 故对 $L^p(1<p\leqslant+\infty)$,L^p 收敛 $\Longrightarrow$ 弱 $*$-收敛. 不难看出在 L^1 中,L^1 收敛 $\Longrightarrow$ 弱收敛.

定理 3.5.12. 令 (X,μ) 为 σ-有限的. 则

$$\Lambda : L^\infty(X,\mu) \to L^1(X,\mu)^*, f \mapsto \Lambda_f \left(\Lambda_f(g) = \int_X fg\right)$$

是等距线性双射.

证明: 我们已经证明过 Λ 等距且显然线性, 要证 Λ 满射.
Case 1: 假设 $\mu(X) < +\infty$, 则 $\forall g \in L^2(X,\mu)$ 有

$$\int_X |g| \leqslant \|g\|_{L^2} \cdot \sqrt{\mu(X)}$$

故 $L^2(X) \subset L^1(X)$. 令 $\varphi \in L^1(X,\mu)^*$, 则 $\forall g \in L^2$ 有

$$|\varphi(g)| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|g\|_1 \leqslant \|\varphi\| \sqrt{\mu(x)} \cdot \|g\|_2$$

故 $\varphi : L^2(X) \to \mathbb{C}$ 有界线性. 故存在 $f \in L^2(X)$ 使 $\forall g \in L^2(X)$ 有 $\varphi(g) = \int_X fg$. 特别地, 对 $L^1(X)$ 中的简单函数 g 有 $\varphi(g) = \int_X fg$.

Case 2: 一般情况, 记 $X = \bigsqcup_{n=1}^\infty X_n, \mu(X_n) < +\infty$. 则存在可测函数 $f : X \to \mathbb{C}$ 满足 $f|_{X_n} \in L^2(X_n)$ 且使任意 X_n 上的简单函数 $g \in L^1$ 有 $\varphi(g) = \int_X fg$. 类似前一定理, 能证 $\|\varphi\| \geqslant \|f\|_\infty$. 故 $f \in L^\infty(X,\mu)$. 任取 $g \in L^1(X,\mu)$, 取 $L^1(X,\mu)$ 中简单函数列 $s_n : X \to \mathbb{C}$ 满足 $\|g - s_n\|_1 \to 0$. 则由 φ 的连续性

$$\varphi(g) = \lim_{n\to\infty} \varphi(s_n) = \lim_{n\to\infty} \int f s_n$$

因为

$$\|fg - fs_n\|_1 \leqslant \|f\|_\infty \cdot \|g - s_n\|_1 \to 0$$

故 $|\int_X fg - \int_X fs_n| \to 0$. 故 $\varphi(g) = \int_X fg$. □

3.6 Radon 测度

本节 X 都指 LCH 空间.

定义 3.6.1. 令 μ 是 X 上的 Borel 测度 (或更一般地, 定义在包含 Borelσ-代数 $\mathcal{B}_X$ 的一个 σ-代数 $\mathcal{A}$ 上的测度) 令 $E \subset X$ 可测.

我们说 μ 在 E 上**外正则 (outer regular)** 若 $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \supset E\text{是}X\text{开子集}\}$;

说 μ 在 E 上**内正则 (inner regular)** 若 $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E\text{是紧子集}\}$.

定义 3.6.2. 令 μ 是 X 上的 Borel 测度. 我们称 μ 是 **Radon 测度**, 若

(1) μ 在紧集上取值有限

(2) μ 在任意 Borel 集上外正则

(3) μ 在任意开集上内正则

我们称 μ 为**正则测度**, 若 μ 满足 (1),(2) 和

(3′) μ 在任意 Borel 集上内正则

由外正则性, 一个 Radon 测度 μ 完全由其在开集上的取值决定, 这是一个非凡的性质, 因为一般测度并不由其在生成 σ-代数的集合上的取值决定. 回忆 $C_c(X)=\{f\in C(X,\mathbb{C}):\operatorname{supp} f\text{紧}\}$. 则 "开集上内正则" 意味着 μ 完全由 $\int_X f d\mu(\forall f\in C_c(X))$ 决定.

引理 3.6.3. *令 μ 是 X 上的 Borel 测度. 令 $U\subset X$ 是开集, 则*

$$\sup\{\mu(K):K\subset U,K\text{紧}\}=\sup\{\int_X fd\mu:f\prec U\}$$

特别地,μ 在 U 上内正则 $\iff \mu(U)=\sup\{\int_X fd\mu:f\prec U\}$.

证明: 若 $f\prec U$, 令 $K=\operatorname{supp}(f)$, 则 $K\subset U$,K 紧, 且 $\int_X fd\mu=\int_X \chi_K d\mu=\mu(K)$.

反之, 令 $K\subset U$,K 紧. 由 Urysohn 引理, 存在 $K\prec f\prec U$, 故 $\mu(K)=\int_X\chi_K d\mu\leqslant\int_X fd\mu$. □

实际上,Radon 测度 μ 和 $\int_X d\mu$ 之间一一对应:

定义 3.6.4. 一个 $C_c(X)$ 上的泛函 (即线性映射 $\Lambda:C_c(X)\to\mathbb{C}$) 称为**正泛函**,dddd$\forall f\in C_c(X)$, 有 $f\geqslant 0\implies \Lambda(f)\geqslant 0$.

定理 3.6.5 (Riese(-Markov) 表示定理)**.** *对任意正泛函 $\Lambda:C_c(X)\to\mathbb{C}$, 存在 X 上的唯一一个 Radon 测度 μ 满足 $\forall f\in C_c(X)$ 有 $\Lambda(f)=\int_X fd\mu$. 并且任意 Radon 测度都来源于某个正泛函 Λ.*

证明: 若 Radon 测度 μ,ν 都满足 $\forall f\in C_c(X)$ 有 $\int_X fd\mu=\Lambda(f)=\int_X fd\nu$, 则由前一引理知 μ 和 ν 在开集上取值相同. 故由外正则性,$\mu=\nu$, 唯一性得证.

Step 1: 给定正泛函 $\Lambda:C_c(X)\to\mathbb{C}$, 定义 μ 如下: 若 $U\subset X$ 是开集, 则

$$\mu(U)=\sup\{\Lambda(f):f\prec U\}$$

$\forall E\subset X$, 令 $\mu^*(E)=\inf\{\mu(U):E\subset U,U\text{是开集}\}$, 则类似于 Lebesgue 测度的构造,$\mu^*$ 是 X 上的外测度, 且任意开集 μ^*-可测. 由 Carathéodory 定理, 所有 μ^*-可测集构成了 σ-代数, 在上面 μ^* 是测度, 故 μ^* 在 $\mathcal{B}_X$ 上是测度, 记为 μ, 则 μ 在任意 Borel 集上外正则.

Step 2: 我们要证 $\Lambda(f)=\int_X fd\mu$, 首先证明:

Claim: 若 $K,L\subset X$ 紧,$f\prec X$, $f|_L=1$, $f|_K=0$, 则 $\mu(L)\leqslant\Lambda(f)\leqslant\mu(K)$.

事实上, 由 μ 在 K 上的外正则性,$\mu(K)=\inf\{\mu(U):U\supset K\text{开集}\}$, 而显然 $\mu(U)\geqslant\Lambda(f)$(由 $\mu(U)$ 定义) 故 $\Lambda(f)\leqslant\mu(K)$. 要证 $\mu(L)\leqslant\Lambda(f)$, 只需对 $\forall\alpha>1$ 证 $\mu(L)\leqslant\Lambda(\alpha f)$. 令 $V=\{x\in X:\alpha f(x)>1\}$, 只需证 $\mu(V)\leqslant\Lambda(\alpha f)$. $\forall g\prec V$, 则 $g\leqslant\alpha f$, 故 $\Lambda(g)\leqslant\Lambda(\alpha f)$, 故 $\mu(V)\leqslant\Lambda(\alpha f)$.

Step 3: 我们证明 $\forall f \in C_c(X)$ 有 $\Lambda(f) = \int_X f d\mu$. 由 Λ 和 $\int_X$ 的线性性, 不妨假设 f 取实值, 因 $f = f^+ - f^-$, 不妨假设 $f \geqslant 0, 0 \leqslant f \leqslant 1$.

任取 $N \in \mathbb{Z}_+$, 对 $0 \leqslant j \leqslant N$, 令 $g_j(x) = \min\{f(x), \frac{j}{N}\}$, 则 $g_i \prec X$, 且 $g_0 = 0, g_N = f$. 对 $1 \leqslant j \leqslant N$, 令 $f_j = g_j - g_{j-1}$, 则 $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_N$ 且 $0 \leqslant f_j \leqslant \frac{1}{N}$. 令

$$K_j = \{x \in \operatorname{supp}(f) : f(x) \geqslant \frac{j}{N}\}$$

则 $f_j|_{K_{j-1}^{\complement}} = 0, f_j|_{K_j} = \frac{1}{N}$, 故

$$\frac{1}{N}\mu(K_j) \leqslant \Lambda(f_j) \leqslant \frac{1}{N}\mu(K_{i-1})$$

显然

$$\frac{1}{N}\mu(K_j) \leqslant \int_X f_j \leqslant \frac{1}{N}\mu(K_{i-1})$$

对所有 $j = 1, 2, \cdots, N$ 求和得

$$\frac{\mu(K_1) + \cdots + \mu(K_N)}{N} \leqslant \Lambda(f), \int_X f \leqslant \frac{\mu(K_0) + \cdots + \mu(K_{N-1})}{N}$$

故 $\left|\Lambda(f) - \int_X f\right| \leqslant \frac{1}{N}(\mu(K_0) - \mu(K_N)) \leqslant \frac{\mu(\operatorname{supp} f)}{N}$, 因 N 任意,$\Lambda(f) = \int_X f$.

Step 4: 对任意开集 U,$\mu(U) = \sup\{\Lambda(f) : f \prec U\} = \sup\{\int_X d\mu : f \prec U\}$ 故由前一引理,μ 在开集上内正则, 若 $K \subset X$ 紧, 由 Urysohn 引理, 存在 $K \prec f \prec X$, 则

$$\mu(K) = \int_X \chi_K d\mu \leqslant \int_X f d\mu = \Lambda(f) < +\infty$$

故 μ 是 Radon 测度.

最后,$\forall$Radon 测度 ν, 令 $\Phi : C_c(X) \to \mathbb{C}, \Phi(f) = \int_X f d\nu$, 则 ν 是 (必然唯一的) 一个由正泛函 Φ 给出的 Radon 测度. 这证明了正线性泛函 $\Longrightarrow$ Radon 测度是满射. 它显然也是单射. $\square$

例子. *我们对 $\mathbb{R}^N$ 上的 Lebesgue 测度的构造就是从 $f \in C_c(\mathbb{R}^N) \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} f$ (Riemann 积分) 来的. 因此由 Lebesgue 测度 (限制在 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$ 上) 是 Radon 测度. 且由 Riesz 表示定理,$C_c(\mathbb{R}^N)$ 上的 Riemann 积分与 Lebesgue 积分相同.*

例子. *令 X 为集合, 任意子集为开集, 则 counting measure 是 Radon 测度.*

定理 3.6.6. *令 μ 是 X 上的 Radon 测度,$1 \leqslant p < +\infty$, 则 $C_c(X)$ 在 $L^p(X, \mu)$ 中稠密.*

证明: 因为简单函数在 $L^p(X, \mu)$ 中稠密, 只需证任意简单函数 $s = \sum a_i \chi_{A_i} \in L^p(X, \mu)$ 能被 $C_c(X)$ 中元素逼近, 这里 $A_i \cap A_j = \varnothing$ 若 $i \neq j$, 且 $a_i \neq 0$. 故由 $s \in L^p(X, \mu)$ 知 $\mu(A_i) < +\infty$. 故只需用 $C_c(X)$ 中元素逼近 χ_{A_i} 即可. 记 $A = A_i$, 因 $\mu(A) < +\infty$, 由 μ 在 A 上的外正则性,$\forall \varepsilon > 0$, 存在开集 $U \supset A$ 使 $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$. 由 μ 在 U 上的内正则性, 存在 $f \prec U$ 使 $\int_X f d\mu \leqslant \mu(U) \leqslant \int_X f d\mu + \varepsilon$. 故 $\|\chi_A - \chi_U\|_p^p = \mu(U \setminus A) < \varepsilon$, 由于 $0 \leqslant \chi_U - f \leqslant 1$, 故

$$\|\chi_U - f\|_p^p = \int_X (\chi_U - f)^p d\mu \leqslant \int_X (\chi_U - f) d\mu \leqslant \varepsilon$$

故 $\|\chi_A - f\|_p \leqslant 2\sqrt[p]{\varepsilon}$. $\square$

我们知道对 Radon 测度 μ,$\forall E\in\mathcal{B}_X$ 有 $\mu(E)=\inf\{\mu(U):U\supset E\text{开}\}$ 而 $\mu(U)=\sup\{\mu(K):K\subset U\text{紧}\}=\sup\{\int_X fd\mu : f\prec U\}$. 但这里由 $\mu(K)$ 或 $\int_X fd\mu$ 逼近 $\mu(E)$ 的过程是不直接的, 我们想找一个更直接的逼近过程. 例如, 是否 E 有内正则性 $\mu(E)=\sup\{\mu(K):K\subset E\text{紧}\}$. 另一个问题是 Borel 测度什么时候 Radon, 本节接下来的目标就是研究这两个问题.

命题 3.6.7. *令 μ 是 X 上的 Borel 测度, 在紧集上有限, 且满足 Radon 测度剩下两个条件的其中之一, 即假设*

(a) μ 在任意 Borel 集上外正则

(b) μ 在开集上内正则

中有一个成立. 假设 μ 在 X 上 σ-有限, 令 $E\in\mathcal{B}_X$, 则 $\forall\varepsilon>0$, 存在开集 U, 闭集 F 满足 $F\subset E\subset U$ 且 $\mu(U\setminus F)<\varepsilon$.

证明: **Case 1:** 假设 (a), 只需找到开集 $U\supset E$ 使 $\mu(U\setminus E)<\frac{\varepsilon}{2}$, 则对 $X\setminus E$ 用相同操作能找到闭集 $F\subset E$ 使 $\mu(E\setminus F)<\frac{\varepsilon}{2}$, 得证.

若 $\mu(E)<+\infty$, 则这个 U 的存在性由 μ 在 E 上的外正则性所得.

一般情况下,E 作为 X 的 Borel 子集是 σ-有限的, 故可写成不交并

$$E=\bigsqcup_{n=1}^{\infty}E_n, E_n\in\mathcal{B}_X, \mu(E_n)<+\infty$$

故存在开集 $U_n\supset E_n$ 使 $\mu(U_n\backslash E_n)<\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. 令 $U=\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n$, 则 $U\backslash E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n\backslash E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n\backslash E_n$. 故 $\mu(U\setminus E)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}=\frac{\varepsilon}{2}$.

Case 2: 假设 (b), 则 $\forall$ 开集 $U\subset X$ 有 $\mu(U)=\sup\{\int_X fd\mu : f\prec U\}$. 令 ν 为由正泛函 $\Lambda: C_c(X)\to\mathbb{C}, f\mapsto\int_X fd\mu$ 定义的 Radon 测度 (注意 $\int_X|f|d\mu\leqslant\int_X\chi_{\mathrm{supp}(f)}d\mu=\mu(\mathrm{supp}(f))<+\infty$) 则

$$\int_X fd\nu=\int_X fd\mu\text{且}\nu(U)=\sup\{\int_X fd\nu : f\prec U\}$$

故 $\mu(U)=\nu(U)$, 即 μ 和 ν 在开集上相同. 由 Case 1,$\forall E\in\mathcal{B}_X$, 存在开集 U, 闭集 F 使 $F\subset E\subset U$ 且 $\nu(V\setminus F)<\varepsilon$. 故因为 $U\setminus F$ 开,$\mu(U\setminus F)=\nu(U\setminus F)<\varepsilon$. □

在给出此命题的应用之前, 我们来看几个 σ-有限的例子.

注记. 一个 Hausdorff 空间 X 称为***σ*-紧**, 若 X 是可数个紧子集的并:$X=K_1\cup K_2\cup\cdots$, 注意通过把 K_n 换成 $K_1\cup\cdots\cup K_n$, 我们总能假设 $X_1\subset X_2\subset\cdots$. 显然若 X 是 σ-紧的 LCH 空间, 且 μ 是 X 上的 Borel 测度且在紧集上有限, 则 μ 是 σ-有限的, 故 μ 在任意 Borel 子集上 σ-有限. 特别地,σ-紧 LCH 空间上的 Radon 测度 σ-有限.

例子. *若 X 是第二可数的 LCH 空间, 则 X 有一个预紧开覆盖, 从而 (由于 X 是 Lindelöf 空间) 有一个可数预紧开覆盖, 故 σ-紧. 因为 LCH 的开/闭子集 LCH, 故第二可数 LCH 空间的任意开/闭子集 σ-紧. 因此,Radon 测度在任意第二可数 LCH 空间上以及它们的开/闭子集上 σ-有限.*

定理 3.6.8. *令 μ 是 X 上的 Borel 测度且在紧集上有限, 假设 X 的每个开子集 σ-紧 (例如当 X 第二可数时) 则 μ 是正则测度, 特别地, 是 Radon 测度.*

证明: **Step 1:** 我们证明 μ 在任意开集 U 上内正则. 因为 U 是 σ-紧的, 存在紧集 $K_1 \subset K_2 \subset U$ 使 $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, 故由单调收敛定理

$$\mu(U) = \int_X \chi_U d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \chi_{K_n} d\mu = \lim_{n\to\infty} \mu(K_n)$$

故 $\mu(U) \leqslant \sup\{\mu(K) : K \subset U, K紧\}$, 而 "$\geqslant$" 显然成立 (由 μ 单调性). 故 μ 在 U 上内正则.
Step 2:$\forall E \in \mathcal{B}_X$, 我们证明 μ 在 E 上正则. 由前一命题,$\forall \varepsilon > 0$, 存在开集 U, 闭集 F 满足 $F \subset E \subset U$ 且 $\mu(E \setminus F), \mu(U \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}$. 故由 $\mu(E) + \mu(U \setminus E) = \mu(U)$ 知

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V), V \supset E开\}$$

故 μ 在 E 上外正则. 因为 X 是 σ-紧, 取紧集 $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset X$ 使 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, 则 $F \cap K_n$ 紧且 $\mu(F) = \lim_{n\to\infty} \mu(F \cap K_n)$, 故由 $F \cap K_n \subset E$ 知

$$\mu(F) \leqslant \sup\{\mu(K) : K \subset E, K紧\}$$

由 $\mu(F) + \mu(E \setminus F) = \mu(E)$ 知

$$\mu(E) \leqslant \mu(F) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sup\{\mu(K) : K \subset E, K紧\} + \frac{\varepsilon}{2}$$

由 ε 任意性,$\mu(E) \leqslant \sup\{\mu(K) : K \subset E, K紧\}$. "$\geqslant$" 显然. 故 μ 在 E 上内正则. □

我们说过, 网收敛不太适合测度论. 因此, 我们希望来源于测度论的 Banach 空间 V 是可分的, 从而其对偶空间 V^* 的单位闭球是紧度量空间 (分析一作业 12 补充题 13 及之后的阅读材料) 从而我们能用点列来研究弱 $*$ 收敛性.

命题 3.6.9. *令 X 为第二可数的 LCH 空间,μ 是 X 上 Radon 测度, 则 $C_c(X)$ 在 l^∞ 范数下可分. 令 $1 \leqslant p < +\infty$, 则 $L^p(X,\mu)$(在 L^p 范数下) 可分.*

证明: 由分析一作业 12 补充题 7,$C_c(X)$ 存在可数子集 $\mathcal{E}$ 在 X 任一点处不消失且分离 X 的点. 由 Stone-Weierstrass 定理,$\mathcal{E}$ 生成的 (不含幺)$*$-子代数在 $C_c(X)$ 中稠密. 令 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{E}$ 生成的 (不含幺)$\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ 上的 $*$-子代数, 则 $\mathcal{A}$ 可数且在 $C_c(X)$ 中和 l^∞ 范数下稠密.

($\mathcal{E}$ 构造方法回顾: 取 X 一组可数拓扑基 $U_1, U_2, \cdots$, 满足每个 U_n 预紧.$\forall m, n \in \mathbb{Z}_+$, 若 $\overline{U_m} \subset U_n$, 取 $\overline{U_m} \prec f_{m,n} \prec U_n$, 取 $\overline{U_m} \not\subset U_n$, 取 $f_{m,n} = 0$, 令 $\mathcal{E} = \{f_{m,n} : m, n \in \mathbb{Z}_+\}$)
Case 1: 假设 X 紧, 则 $\mathcal{A}$ 在 $C_c(X)$ 中和 L^p 范数下稠密 (因为 $\|f\|_p^p \leqslant \|f\|_{l^\infty} \cdot \mu(X)$) 而 $C_c(X)$ 在 $L^p(X,\mu)$ 中和 L^p 范数下稠密, 故 $\mathcal{A}$ 在 $L^p(X,\mu)$ 中稠密,$L^p(X,\mu)$ 可分.
Case 2: 一般情况,$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n, X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ 紧.$\forall f \in L^p(X,\mu)$, 由控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f\chi_{X_n}\|_p^p = 0$$

故 $\bigcup_{n=1}^{\infty} L^p(X_n,\mu)$ 在 $L^p(X,\mu)$ 中稠密. 这里,$L^p(X_n,\mu)$ 看作 $L^p(X,\mu)$ 子集. 若 $g \in L^p(X_n,\mu)$, 则 $g(x) = 0$ 若 $x \in X \setminus X_n$. 由 Case 1, 每个 $L^p(X_n,\mu)$ 可分, 故 $L^p(X,\mu)$ 可分. □

注记. $X=\mathbb{R}^N$ 时 $L^p(\mathbb{R}^N,\mu)$ 可这样证可分:$X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_n, X_n=[-m,n]\times\cdots\times[-n,n]$. 由上面 Case 2 的论证, 只需证 $L^p(X_n,\mu)$ 可分, 只需证 $C(X_n)$ 在 l^∞ 下可分: $C(X_n)$ 中元素可由 $\{n$个变量的$(\mathbb{Q}+i\mathbb{Q})$-系数多项式$\}$ 一致逼近, 而后者可数 (由 Weierstrass 多项式逼近定理).

3.7 乘积测度

考虑 $f\in L^1(\mathbb{R}^2,m), f\geqslant 0$. 我们想知道何时 $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}f(x,y)dydx=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}dxdy$ 成立. 特别地,$x\mapsto\int_{\mathbb{R}}f(x,y)dy$ 是否可测? 因为 f 可被简单函数逼近, 不妨考虑 $f=\chi_E$,$E\subset\mathbb{R}^2$ 是 Borel 集. 令

$$E_x=\{y\in\mathbb{R}:(x,y)\in E\}$$

$$E^y=\{x\in\mathbb{R}:(x,y)\in E\}$$

则 $\int_{\mathbb{R}}\chi_E(x,y)dy=m(E_x),\int_{\mathbb{R}}\chi_E(x,y)dx=m(E^y)$. 简单起见, 假设 $E\subset[0,1]^2$.(一般情况可通过 $E=\bigcup\limits_{m,n\in\mathbb{Z}}E\cap([m,m+1]\times[n,n+1])$ 来处理) 考虑

$$\mathscr{C}=\{E\in\mathcal{B}_{[0,1]^2}:x\in\mathbb{R}\to m(E_x)\text{和}y\in\mathbb{R}\to m(E^y)\text{Borel 可测且}\int_0^1 m(E_x)dx=\int_0^1 m(E^y)dy\}$$

我们想证明 $\mathscr{C}=\mathcal{B}_{[0,1]^2}$.$\mathscr{C}$ 显然包含所有形如 $A\times B(A,B\in\mathcal{B}_{[0,1]})$ 的集合, 因为若 $E=A\times B$, 则 $m(E_x)=m(B)\chi_A(x),m(E^y)=m(A)\chi_B(y),\int m(E_x)dx=m(B)m(A)=\int m(E^y)dy$. 不难验证的是 $\mathcal{B}_{[0,1]^2}$ 由所有形如 $A\times B$ 的集合生成. 不难验证 $E\in\mathscr{C}\iff[0,1]^2\setminus E\in\mathscr{C}$. 但验证 $\mathscr{C}$ 是一个 σ-代数不容易. 尤其难证明

$$E_1,E_2\in\mathscr{C}\implies E_1\cup E_2\in\mathscr{C}\tag{$*$}$$

但我们不难验证: 若 $E_1,E_2,\cdots\in\mathscr{C}$ 且 $E_1\subset E_2\subset\cdots$(或 $E_1\supset E_2\supset\cdots$), 则 $\cup_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{C}$(或 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{C}$), 即 $\mathscr{C}$ 是一个**单调类**.

如果 $(*)$ 能证明, 则 $\forall E_1,E_2,\cdots\in\mathscr{C}$ 有 $E_1\cup\cdots\cup E_n\in\mathscr{C}$, 故 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{C}$ 从而 $\mathscr{C}$ 是 σ-代数. 令 $\mathscr{E}=\left\{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\times B_i:n\in\mathbb{N},A_i,B_i\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\right\}$, 不难想象 $\mathscr{E}$ 中元素可以写成不交并 $\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\times B_i$ 的形式, 显然 $\mathscr{E}$ 是一个代数 (即 $\varnothing\in\mathscr{E}$,$\mathscr{E}$ 对取补集和有限并封闭) 且我们能证明 $\mathscr{E}\in\mathscr{C}$. 我们希望由 $\mathscr{E}\subset\mathscr{C}\implies\sigma(\mathscr{E})\subset\mathscr{C}$, 哪怕 $\mathscr{C}$ 只是一个单调类而不是 σ-代数.(因为从直觉上讲,σ-代数就是代数加上对可数递增并的封闭). 若如此, 不难验证 $\sigma(\mathscr{E})=\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$, 故 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}\subset\mathscr{C}$.

定义 3.7.1. 令 X 为集合,$\mathscr{C}\subset 2^X$. 我们称 $\mathscr{C}$ 是**单调类 (monotone class)**, 若 $\mathscr{C}$ 关于可数递增并和可数递减交封闭, 即若 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}\subset\mathscr{C}$ 则 $E_1\subset E_2\subset\cdots\implies\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{C}$,$E_1\supset E_2\supset\cdots\implies\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{C}$. 若 $\mathscr{E}\subset 2^X$,$\mathscr{E}$ **生成的单调类**记为 $\mathrm{mon}(\mathscr{E})$, 定义为 “$\bigcap$ 包含 $\mathscr{E}$ 的单调类”

显然 $\sigma(\mathscr{E})$ 是包含 $\mathscr{E}$ 的单调类. 故 $\mathrm{mon}(\mathscr{E}) \subset \sigma(\mathscr{E})$.

定理 3.7.2 (单调类定理)**.** 令 $\mathscr{E} \subset 2^X$ 为集合 X 的一个代数, 则 $\mathrm{mon}(\mathscr{E}) = \sigma(\mathscr{E})$.

注记. 因此, 若 $\mathscr{E} \subset \mathscr{C}$ 且 $\mathscr{C}$ 是 X 的单调类, 则 $\sigma(\mathscr{E}) \subset \mathscr{C}$.

证明: 只需证 $\mathrm{mon}(\mathscr{E})$ 是 σ-代数, 则有 $\mathrm{mon}(\mathscr{E}) \supset \sigma(\mathscr{E})$, 从而 $\mathrm{mon}(\mathscr{E}) = \sigma(\mathscr{E})$. 记 $\mathcal{M} = \mathrm{mon}(\mathscr{E})$. 只需证 $\forall E, F \in \mathcal{M}$ 有 $E \cup F \in \mathcal{M}, X \setminus E \in \mathcal{M}$. 则 $\varnothing \in \mathcal{M}$(因为 $\varnothing \in \mathscr{E}$),$\mathcal{M}$ 对补集封闭, 且若 $E_1, E_2, \cdots \in \mathcal{M}$ 则 $\forall n$ 有 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{M}$, 从而 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{M}$. 故 $\mathcal{M}$ 是 σ-代数. 定义

$$u : 2^X \times 2^X \to 2^X, u(E, F) = E \cup F$$

则 $\forall F \subset X$

$$u(\cdot, F)^{-1}(\mathcal{M}) = \{E \in 2^X : u(E, F) \in \mathcal{M}\}$$

$$u(F, \cdot)^{-1}(\mathcal{M}) = \{E \in 2^X : u(F, E) \in \mathcal{M}\}$$

是单调类. 因为 $u : \mathscr{E} \times \mathscr{E} \to \mathscr{E} \subset \mathcal{M}$. 故 $\forall F \in \mathscr{E}, u(\cdot, F)^{-1}(\mathcal{M})$ 是包含 $\mathscr{E}$ 的单调类, 从而包含 $\mathcal{M}$. 故 $u : \mathcal{M} \times \mathscr{E} \to \mathcal{M}$. 类似地,$\forall E \in \mathcal{M}, u(E, \cdot)^{-1}(\mathcal{M})$ 是包含 $\mathscr{E}$ 的单调类, 故包含 $\mathcal{M}$. 故 $u : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$. 故 $\mathcal{M}$ 对有限并封闭. 定义

$$\delta : 2^X \to 2^X, \delta(E) = X \setminus E$$

则 $\delta = \delta^{-1}$. 而 $\delta(\mathcal{M}) = \{X \setminus E : E \in \mathcal{M}\}$ 是单调类. 由 $E \in \mathscr{E} \iff X \setminus E \in \mathscr{E}$ 知 $\delta(\mathscr{E}) = \mathscr{E}$. 故 $\mathscr{E} \subset \sigma(\mathcal{M})$. 故 $\mathcal{M} \subset \delta(\mathcal{M}) = \delta^{-1}(\mathcal{M})$. 故 $E \in \mathcal{M} \implies \delta(E) \in \mathcal{M}$. 故 $\mathcal{M}$ 对取补集封闭. $\square$

我们接下来研究一般地 Fubini 定理.

定义 3.7.3. 令 $(X, \mathcal{M}), (Y, \mathcal{N})$ 为可测空间. 则 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 的**张量积**为

$$\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \sigma\{A \times B : A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{N}\}$$

若不加说明则 $X \times Y$ 上 σ-代数取 $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.

命题 3.7.4. 令 $\mathscr{E} \subset 2^X, \mathscr{F} \subset 2^Y$ 满足 $X \in \mathscr{E}, Y \in \mathscr{F}$, 则

$$\sigma(\mathscr{E}) \otimes \sigma(\mathscr{F}) = \sigma(\{A \times B : A \in \mathscr{E}, B \in \mathscr{F}\})$$

证明: 记右边为 $\mathcal{A}$, 因为 $\forall A \in \mathscr{E}, B \in \mathscr{F}$ 有 $A \times B \in \sigma(\mathscr{E}) \otimes \sigma(\mathscr{F})$, 故 $\sigma(\mathscr{E}) \otimes \sigma(\mathscr{F}) \supset \mathcal{A}$. 要证 “$\subset$” , 只需证 $\forall A \in \sigma(\mathscr{E}), B \in \sigma(\mathscr{F})$ 有 $A \times B \in \mathcal{A}$. 我们证 $A \times Y \in \mathcal{A}$, 则类似地也有 $X \times B \in \mathcal{A}$, 从而 $A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) \in \mathcal{A}$.

$\{A \in 2^X : A \times Y \in \mathcal{A}\}$ 包含 $\mathscr{E}$(因为 $Y \in \mathscr{F}$) 且是 σ-代数.(由 $(A \times Y)^\complement = A^\complement \times Y$, $\left(\bigcup_n A_n\right) \times Y = \bigcup_n (A_n \times Y)$) 故包含 $\sigma(\mathscr{E})$. 得证. $\square$

推论 3.7.5. *令 X 和 Y 为第二可数的拓扑空间, 则 $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y = \mathcal{B}_{X\times Y}$.(回忆若 U 是 X 可数拓扑基则 $\mathcal{B}_X = \sigma(U)$)*

证明: 令 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 分别是 X 和 Y 的一组可数拓扑基且假设 $X \in \mathcal{U}, Y \in \mathcal{V}$, 则 $\mathcal{W} = \{U \times V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$ 是 $X \times Y$ 的一组可数拓扑基, 由 $\sigma(\mathcal{U}) \otimes \sigma(\mathcal{V}) = \sigma(\mathcal{W})$ 知 $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y = \mathcal{B}_{X\times Y}$. □

命题 3.7.6. *投影 $\pi_X : X \times Y \to X, \pi_Y : X \times Y \to Y$ 可测.*

证明: 若 $A \subset X$ 可测, 则 $\pi_X^{-1}(A) = A \times Y$ 可测. □

命题 3.7.7. *令 $(X, \mathcal{M}), (Y, \mathcal{N}), (Z, \mathcal{P})$ 为可测空间.$f : Z \to X, g : Z \to Y$ 为映射. 令 $f \vee g : Z \to X \times Y, z \mapsto (f(z), g(z))$. 则 $f \vee g$ 可测 (若 $X \times Y$ 取 σ-代数 $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$) 当且仅当 f 和 g 都可测.*

证明: 若 $f \vee g$ 可测, 由 $\pi_X : X \times Y \to X$ 可测知 $f = \pi_X \circ (f \vee g)$ 可测. 反之, 假设 f 和 g 都可测. 则 $\forall A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{N}$ 有 $(f \vee g)^{-1}(A \times B) = f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B)$ 可测. 故 $f \vee g$ 可测. □

推论 3.7.8. *令 $(X, \mathcal{M}), (Y, \mathcal{N}), (Z, \mathcal{P})$ 为可测空间. 若 $E \subset X \times Y, f : X \times Y \to Z. \forall x \in X, y \in Y$, 令*

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}, E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$$

$$f_x : Y \to Z, f_x(t) = f(x, t), f^y : X \to Z, f^y(s) = f(s, y)$$

(1) 若 $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ 则 $E_x \in \mathcal{N}, E^y \in \mathcal{M}$

(2) 若 $f : X \times Y \to Z$ 可测 (取 $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ 为 $X \times Y$ 的一个 σ-代数), 则 f_x, f^y 可测

则 f_x, f^y 可测.

证明: 令 $\alpha : Y \to X \times Y, t \mapsto (x, t)$. 则通过观察 α 每个分量可知 α 可测. 故 $f_x = f \circ \alpha$ 可测.$E_x = \alpha^{-1}(E)$ 可测. 类似地,f^y, E^y 可测. □

我们把形如 $A \times B (A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{N})$ 的集合称为**可测长方形**.

命题 3.7.9. *令 $(X, \mathcal{M}), (Y, \mathcal{N})$ 为测度空间.*

$$\mathscr{E} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i : n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{M}, B_i \in \mathcal{N} \right\}$$

则 $\mathscr{E}$ 是 $X \times Y$ 的一个代数, 且其中任一元素都能写成有限个可测长方形的不交并.

证明: 显然 $\varnothing \in \mathscr{E}$ 且 $\mathscr{E}$ 对有限并封闭. 由

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i\right)^{\complement} &= \bigcap_{i=1}^{n} (A_i \times B_i)^{\complement} = \bigcap_{i=1}^{n} \left(\left(A_i^{\complement} \times B_i\right) \cup \left(A_i \times B_i^{\complement}\right)\right) \\ &= \bigcup_{i,j=1}^{n} \left(\left(A_i^{\complement} \times B_i\right) \cap \left(A_j \times B_j^{\complement}\right)\right) = \bigcup_{i,j=1}^{n} (A_j \setminus A_i) \times (B_i \setminus B_j)\end{aligned}$$

知 $\mathscr{E}$ 对取补集封闭, 因为是一个代数. 我们证明 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \times B_i$ 可写成有限个可测长方形的并.$n=1$ 时显然. 假设 case $n-1$ 成立, 考虑 case n. 由 case $n-1$, 有不交并 $\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}(A_i \times B_i) = \bigsqcup\limits_{i=1}^{m} C_i \times D_i$. 其中 $C_i \times D_i$ 是可测长方形. 故

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i = \left(\bigsqcup_{i=1}^{m} C_i \times D_i\right) \cup (A_n \times B_n) = \left(\bigsqcup_{i=1}^{m} (C_i \times D_i) \setminus (A_n \times B_n)\right) \sqcup (A_n \times B_n)$$

而

$$(C_i \times D_i) \setminus (A_n \times B_n) = ((C_i \setminus A_n) \times D_i) \sqcup ((C_i \cap A_n) \times (D_i \setminus B_n))$$

□

定理 3.7.10 (Fubini 定理)**.** *令 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 和 $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ 为 σ-有限测度空间,$f : X \times Y \to [0, +\infty]$ 是 $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$-可测的. 则*

(1) $x \in X \mapsto \int_Y f(x,y) d\nu(y)$ 和 $y \in Y \mapsto \int_X f(x,y) d\mu(x)$ 可测

(2) $\int_X \int_Y f d\nu d\mu = \int_X \int_Y f d\mu d\nu$

证明: 令 $\mathscr{L} = \{$满足 (1) 和 (2) 的函数$f : X \times Y \to [0, +\infty]\}$. 我们证明 $\mathscr{L}$ 包含所有 $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$-可测函数, 我们有:

(a) $\forall f, g \in \mathscr{L}, a \in [0, +\infty)$, 则 $af \in \mathscr{L}, f + g \in \mathscr{L}$.

(b) 若 $\{f_n\}$ 是 $\mathscr{L}$ 中递增列, 逐点收敛到 $f : X \times Y \to [0, +\infty]$, 则由单调收敛定理得 $f \in \mathscr{L}$.

(c) 若 $\mu(X), \nu(Y) < +\infty$.$\{f_n\}$ 是 $\mathscr{L}$ 中函数列, 逐点收敛到 $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ 且存在 $a \in [0, +\infty)$ 使 $\forall n$ 有 $f_n \leqslant a$. 则由控制收敛定理得 $f \in \mathscr{L}$.

Case 1: 假设 $\mu(X), \nu(Y) < +\infty$, 因为对任意 $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$-可测的 $f : X \times Y \to [0, +\infty]$, 存在递增简单函数列逐点收敛到 f, 故由 (a) 和 (b), 只需证明 $\forall E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ 有 $\chi_E \in \mathscr{L}$. 令 $\mathcal{C} = \{E \in 2^{X \times Y} : \chi_E \in \mathscr{L}\}$. 则由 (b) 和 (c) 知 $\mathcal{C}$ 是单调类.

令 $\mathscr{E}$ 为前一命题中的代数.$\forall E \in \mathscr{E}$,$E$ 可写成 $E = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \times B_i (A_i \in \mathcal{M}, B_i \in \mathcal{N})$. 故 $\chi_E = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{A_i \times B_i}$. 显然 $\chi_{A_i \times B_i} \in \mathcal{C}$. 故由 (a) 知 $\chi_E \in \mathcal{C}$ 从而 $E \in \mathscr{E}$. 我们证了 $\mathscr{E} \subset \mathcal{C}$. 故由单调类定理,$\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \sigma(\mathscr{E}) \subset \mathcal{C}$.

Case 2: 一般情况. 则 $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n, Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Y_n, X_n \in \mathcal{M}, Y_n \in \mathcal{N}, X_1 \subset X_2 \subset \cdots, Y_1 \subset Y_2 \subset \cdots$ 且 $\mu(X_n), \nu(Y_n) < +\infty$. 任取 $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$-可测 $f : X \times Y \to [0, +\infty]$, 则由 case 1,$f \cdot \chi_{X_i \times Y_i} \in \mathscr{L}$. 故由 (b) 知 $f \in \mathscr{L}$. □

定义 3.7.11. 令 $(X,\mathcal{M},\mu),(Y,\mathcal{N},\nu)$ 为 σ-有限的. 定义 $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ 上的**乘积测度**$\boldsymbol{\mu\times\nu}$ 为: 若 $E\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$, 则

$$(\mu\times\nu)(E)=\int_X\int_Y\chi_E d\nu d\mu=\int_Y\int_X\chi_E d\mu d\mu$$

(由前一证明的 (a),(b) 可知 $\mu\times\nu$ 满足可数可加性, 故是测度)

命题 3.7.12. 若 $f:X\times Y\to[0,+\infty]$ 是 $(\mathcal{M}\otimes\mathcal{N})$-可测, 则

$$\int_{X\times Y}fd(\mu\times\nu)=\int_X\int_Y fd\nu d\mu=\int_Y\int_X fd\mu d\nu$$

证明: 由递增简单函数逼近和单调收敛定理约化为 f 是简单函数的情形, 从而约化为 $f=\chi_E(E\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{N})$ 的情形. □

推论 3.7.13. 令 $(X,\mathcal{M},\mu)$ 和 $(Y,\mathcal{N},\nu)$ 为 σ-有限测度空间 $E\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$, 则以下等价:

(1) $(\mu\times\nu)(E)=0$

(2) 函数 $x\in X\mapsto\nu(E_x)\quad a.e.$是零

(3) 函数 $y\in Y\mapsto\mu(E^y)\quad a.e.$是零

证明:

$$\begin{aligned}(1)&\iff\int_{X\times Y}\chi_E d(\mu\times\nu)=0\iff\int_X\int_Y\chi_E d\nu d\mu=0\\&\iff\int_X\nu(E_x)d\mu(x)=0\iff(2)\end{aligned}$$

类似地,(1) $\iff$ (3). □

定理 3.7.14 (Fubini 定理)**.** 令 $(X,\mathcal{M},\mu),(Y,\mathcal{N},\nu)$ 为 σ-有限测度空间, 令 $f\in L^1(X\times Y,\mu\times\nu)$, 则 $f_x\in L^1(Y,\nu)$ 对$a.e.x\in X$ 成立,$f^y\in L^1(X,\mu)$ 对$a.e.y\in Y$ 成立, 通过在不成立处取值为 0, 则 $x\mapsto\int_Y f_x d\nu$ 和 $y\mapsto\int_X f^y d\mu$ 是可积的. 且

$$\int_{X\times Y}fd(\mu\times\nu)=\int_X\int_Y fd\nu d\mu=\int_Y\int_X fd\mu d\nu$$

注记. 若 $f:X\times Y\to\mathbb{C}$ 可测, 则 $f\in L^1(X\times Y,\mu\times\nu)\iff\int_X\int_Y|f|d\nu d\mu<+\infty\iff\int_Y\int_X|f|d\mu d\nu<+\infty$.

证明: 通过考虑取 f 的实虚部, 不妨假设 f 取实值. 由

$$\int_X\left(\int_Y|f_x|d\nu\right)d\mu(x)=\int_X\int_Y|f(x,y)|d\nu(u)d\mu(x)<+\infty$$

知 $\int_Y|f_x|d\nu<+\infty\quad$ a.e.$x\in X$. 由 $x\mapsto\int_Y f_x^+d\nu$ 和 $x\mapsto\int_Y f_x^-d\nu$ 在一个零测集外可积以及 $f=f^+-f^-$ 知 $x\mapsto\int_Y\int_X f_x d\nu$ (以及类似地 $y\mapsto\int_X f^y d\mu$) 在零测集外可测且可积.

要证 $\int_{X\times Y} fd(\mu\times\nu)=\int_X\int_Y fd\nu d\mu$, 通过考虑正负部, 不妨假设 $f\geqslant 0$, 则

$$\int_{X\times Y} f^+d(\mu\times\nu)=\int_X\int_Y f^+d\nu d\mu$$

$$\int_{X\times Y} f^-d(\mu\times\nu)=\int_X\int_Y f^-d\nu d\mu$$

两式相减得证. □

注记. 若 X,Y 是第二可数的 LCH 空间, 我们知道 $\mathcal{B}_{X\times Y}=\mathcal{B}_X\otimes\mathcal{B}_Y$. 若 μ 和 ν 分别是 X 和 Y 上的 Radon 测度, 则 $\mu\times\nu$ 是 $X\times Y$ 上的 Borel 测度, 且 $\mu\times\nu$ 在紧集上有限.
(若 $K\subset X\times Y$ 紧, 令 $\pi_X:X\times Y\to X,\pi_Y:X\times Y\to Y$ 为投影, 则 $L_1=\pi_X(K)$ 和 $L_2=\pi_Y(K)$ 紧,$K\subset L_1\times L_2$. 从而

$$(\mu\times\nu)(K)=\int_{X\times Y}\chi_K d(\mu\times\nu)\leqslant\int_{X\times Y}\chi_{L_1\times L_2}d(\mu\times\nu)=\mu(L_1)\nu(L_2)<+\infty)$$

因 $X\times Y$ 第二可数, 故 $\mu\times\nu$ 是 $X\times Y$ 上的正则 (从而 Radon) 测度.

例子. *由 $\mathbb{R}^n$ 上 Lebesgue 测度 m_k 构造方式, 若 $f\in C_c(\mathbb{R}^n)$ 则*

$$\int_{\mathbb{R}^n} fdm_n=\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}} f\left(x_1,\cdots,x_n\right)dx_1\cdots dx_n$$

类似地, 若 $f\in C_c(\mathbb{R}^{n+k})$, 则

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n+k}} fdm_{n+k}&=\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}} f\left(x_1,\cdots x_{n+k}\right)dx_1\cdots dx_{n+k}\\
&=\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} fdm_n\left(x_1,\cdots,x_n\right)\right)dx_{n+1}\cdots dx_{n+k}\\
&=\int_{\mathbb{R}^k}\int_{\mathbb{R}^n} fdm_n\left(x_1,\cdots,x_n\right)dm_k\left(x_{n+1},\cdots,x_{n+k}\right)\\
&\overset{Fubini}{=}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k} fdm_n\times m_k
\end{aligned}$$

因为 Radon 测度由其对 C_c 中函数积分决定, 因此$\boldsymbol{m_{n+k}=m_n\times m_k}$.

一般来说 $\overline{\mathcal{M}}\otimes\overline{\mathcal{N}}\subsetneqq\overline{\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}}$, 相应地 $\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}}\otimes\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}}\subsetneqq\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{m+n}}}$.

定理 3.7.15. *令 $(X,\mathcal{M},\mu)$ 和 $(Y,\mathcal{N},\nu)$ 为 σ-有限测度空间,$\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 在 μ,ν 下完备,$\overline{\mathcal{M}\times\mathcal{N}}$ 是 $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ 在 $\mu\times\nu$ 下的完备化.*

(1) 令 $f:X\times Y\to[0,+\infty]$ 或 $\mathbb{C}$ 是 $\overline{\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}}$ 可测, 且对 $a.e.x\in X$,f_x 是 $\mathcal{N}$-可测的, 对 $a.e.y\in Y$,f^y 是 $\mathcal{M}$-可测的.

(2) 若 $f:X\times Y\to[0,+\infty]$ 是 $\overline{\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}}$ 可测, 则 a.e. 定义的 $x\mapsto\int_Y f_xd\nu$ 和 $y\mapsto\int_X f^yd\mu$ 分别 $\mathcal{N}$-可测和 $\mathcal{M}$-可测. 且

$$\int_{X\times Y} fd(\mu\times\nu)=\int_X\int_Y fd\nu d\mu=\int_Y\int_X fd\mu d\nu$$

(3) 若 $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ 是 $\overline{\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}}$ 可测且 $f \in L^1(X \times Y, \mu \times \nu)$, 则对 $a.e. x \in X$ 有 $f_x \in L^1(Y, \nu)$;$a.e. y \in Y$ 有 $f^y \in L^1(X, \mu)$.$a.e.$ 定义的 $x \mapsto \int_Y f_x d\nu$ 和 $y \mapsto \int_X f^y d\mu$ 可积且

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y f d\nu d\mu = \int_Y \int_X f d\mu d\nu$$

证明: 存在 $\Delta \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$,$(\mu \times \nu)(\Delta) = 0$ 使得若令 $\Omega = (X \times Y) \setminus \Delta$ 则 $g := f \cdot \chi_\Omega$ 是 $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-可测的. 因此 g 满足 (1)(2)(3). 令 $h = f - g = f \cdot \chi_\Delta$. 则只需验证 h 也满足 (1)(2)(3) 即可.

而只需验证 (1) 和

(2′) 若 $h : X \times Y \to [0, +\infty]$, 则 $x \mapsto \int_Y h_x d\nu$ 和 $y \mapsto \int_X h^y d\mu$ a.e. 为零.

则 (2) 显然成立, 故若 $h : X \times Y \to \mathbb{C}$ 则 $x \mapsto \int_Y h_x d\nu$ 和 $y \mapsto \int_X h^y d\mu$ a.e. 为 0.(因为 $\left|\int_Y h_x d\nu\right| \leqslant \int_Y |h_x| d\nu$) 从而

$$\int_{X \times Y} h d(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y h d\nu d\mu = \int_Y \int_X h d\mu d\nu = 0$$

(3) 对 h 成立. 剩余 (1) 和 (2′) 的证明留作作业. $\square$

第四章 多元微积分与流形

4.1 反函数定理

我们回到多变量微积分. 回忆若 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开集,$f:\Omega \to \mathbb{R}^n$ 是$\boldsymbol{C^r}$ 的, 若

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant r, \forall 1 \leqslant i_1, \cdots, i_k \leqslant n, \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f\text{存在且连续}$$

若 $f \in C^1(\Omega)$, 则 f **可微**, 即 $\forall x \in \Omega$,

$$f(x+v) = f(x) + df|_x \cdot v + o(v)$$

这里 $v \in \mathbb{R}^n, \lim\limits_{v \to 0} \dfrac{o(v)}{\|v\|} = 0, df|_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, 且若把 v 写成 $\mathbb{R}^n$ 中的列向量, 则 $df|_x$ 是 $m \times n$ 矩阵:

$$df = \mathrm{Jac}(f) = \begin{pmatrix} \partial_1 f^1 & \partial_2 f^1 & \cdots & \partial_n f^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f^m & \partial_2 f^m & \cdots & \partial_n f^m \end{pmatrix}$$

若我们把 f 写成 $f(x) = \begin{pmatrix} f^1(x) \\ \vdots \\ f^m(x) \end{pmatrix}, f^i : \Omega \to \mathbb{R}$.

我们接下来的学习目标是研究所谓隐函数定理. 考虑一个简单例子: 函数 $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f = f(x,y,z)$. 考虑 $Z(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0\}$. 隐函数定理会告诉我们, 如果 $\partial_z(f) \neq 0$, 则 $Z(f)$ 上我们能局部地解出 $z = g(x,y)$, 其中 (x,y) 定义在 $\mathbb{R}^2$ 的一个开集上.

例子. *考虑球面 $x^2+y^2+z^2-1=0$.*

当 $z \neq 0$ 时,$\partial_z(f) = 2z \neq 0$, 则在 $Z(f)$ 上,

$$z = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{若} z > 0 \\ -\sqrt{1-x^2-y^2} & \text{若} z < 0 \end{cases}$$

但如果 $z_0 = 0, p = (x_0, y_0, z_0) \in Z(f)$. 则在 p 附近, 我们无法用唯一的关于 x,y 的函数式表达 z. 在这个 p 附近, 我们只能用 x,z 来解 y(若 $\partial_y f(p) = 2y_0 \neq 0$) 或用 y,z 来解 x(若 $\partial_x f(p) = 2x_0 \neq 0$).

我们要说清楚这里的“解”是什么意思, 并严格证明这一结论. 事实上, 隐函数定理中隐含了微分流形概念的动机, 而要证隐函数定理, 我们要先证反函数定理.

定义 4.1.1. 令 $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ 为开集. 我们说映射 $f: U \to V$ 是 **C^r-(微分) 同胚** $(r \geqslant 0)$ 若 f 是 C^r 的双射, 且其逆映射 f^{-1} 也是 C^r 的 (由 f 和 f^{-1} 连续可知 f 是同胚).C^∞-微分同胚简称**微分同胚**.

注记. 令 $g = f^{-1}$, 令 $p \in U$, 则由 $f \circ g = \mathrm{id}_V, g \circ f = \mathrm{id}_U$ 得 $df|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 和 $dg|_{f(p)} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 互为逆线性映射. 因此对 C^r-同胚 $(r \geqslant 1)$ 一定有 $m = n$.

命题 4.1.2. *C^r 函数的复合也是 C^r.*

证明: 对 $1 \leqslant k \leqslant r$ 用归纳法,chain rule 和 Leibniz 公式可知 $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k}(f \circ g)$ 是一些 (f 的 $\leqslant k$ 次偏导)$\circ g$ 和 g 的 $\leqslant k$ 次偏导的乘积的线性组合. 它们是连续的. □

定理 4.1.3 (反函数定理)**.** *令 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集,$\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 是 C^r 映射 $(r \geqslant 1)$. 令 $p \in \Omega$, 假设 $d\varphi|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是可逆线性映射, 则存在 p 的领域 $U \subset \Omega$ 和 $f(p)$ 的领域 $V \subset \mathbb{R}^n$ 使 $\varphi : U \to V$ 是 C^r-同胚.*

注记. 证明时不妨假设 $p = 0, f(p) = 0$(通过把 φ 换成 $\varphi(x+p) - \varphi(p)$). 令 $A = d\varphi|_0$, 则

$$d(A^{-1} \circ \varphi)|_0 = A^{-1} \cdot d\varphi|_0 = 1$$

因此只需对 $A^{-1} \circ \varphi$ 证明反函数定理, 再复合上 A 得 f 的反函数定理. 故不妨假设 $d\varphi|_0 = 1$. 因此

$$\varphi(x) = x + R(x)$$

这里 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{R(x)}{\|x\|} = 0$. 我们要在 $\varphi(0)$ 的一个领域 V 上找到 $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ 使 $\varphi \circ \psi(y) = y$, 即 $\psi(y) + R(\psi(y)) = y$, 即

$$\psi(y) = y - R \circ \psi(y)$$

注意这个问题和解 ODE

$$\begin{cases} f'(t) = & \varphi \circ f(t) \\ f(0) = & \xi \end{cases}$$

即 $f(t) = \xi + \displaystyle\int_0^t \varphi \circ f(s) ds$ 的相似性. 因此它们的研究方法也类似, 即用:

引理 4.1.4 (压缩不动点定理)**.** *令 X 是完备度量空间,$0 \leqslant r < 1$,$T : X \to X$ 是压缩映射: 对 X 中任意 x_1, x_2 有*

$$d(T(x_1), T(x_2)) \leqslant r d(x_1, x_2)$$

则存在唯一 $x \in X$ 满足 $T(x) = x$.

反函数定理的证明. 根据假设,$d\varphi$ 在 p 处可逆. 故 $\det(d\varphi)$ 在 p 处非零. 故在 p 附近非零 (因为 $\det(d\varphi)$ 可由 φ 的各分量的一阶偏导的乘法和加法得到). 故, 不妨缩小 Ω 使 $d\varphi$ 在 Ω 上处处可逆.

Step 1: 我们证明 $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 是开映射且在 p 的一个邻域 U 上是单射, 则 $V = \varphi(U)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集且 $\varphi : U \to V$ 是同胚 (我们会在 Step 2 中证明 $\varphi^{-1} \in C^r$). 只需证:

Claim: 存在 p 邻域 $U \in \Omega$ 使 $\varphi|_U$ 是单射且 $\varphi(p)$ 是 $\varphi(U)$(在 $\mathbb{R}^n$ 中的) 内点.

则对 U 中其它点 p' 类似地也有 $\varphi(p')$ 是 $\varphi(U)$ 的内点, 故 $\varphi(U)$ 是开集. 根据前面讨论, 假设 $p = 0, \varphi(0) = 0, d\varphi|_0 = I$.

Claim 的证明. 记 $\varphi(x)=x+R(x)$. 不妨假设 Ω 是包含 0 的开球. 由 $dR|_0=d\varphi|_0-I=0$ 和 $dR|_x$ 关于 $x\in\Omega$ 的连续性, 对任意 $0<\varepsilon<1$, 存在 $\delta>0$ 使得 $U=B_{\mathbb{R}^n}(0,\delta)\subset\Omega$ 且在 U 上 $\|dR\|\leqslant\varepsilon$. 故 R 是 Lipschitz 连续的, 且 $\forall x_1,x_2\in B(0,\delta)$ 有

$$\|R(x_1)-R(x_2)\|\leqslant\varepsilon\|x_1-x_2\|$$

故若 $R(x_1)=R(x_2)$ 则由

$$\|x_1-x_2\|\leqslant\|R(x_1)-R(x_2)\|\leqslant\varepsilon\|x_1-x_2\|$$

可知 $\|x_1-x_2\|=0, x_1=x_2$. 因此 φ 在 U 上是单射.

我们接下来证明 $\varphi(U)$ 包含一个以 0 为中心的开球. 即证当 $y\in\mathbb{R}^n$ 充分小时存在 $x\in U$ 使 $y=\varphi(x)=x+R(x)$, 即 $x=y-R(x)$. 定义

$$T_y:U\to\mathbb{R}^n, T_y(x)=y-R(x)$$

注意 $R(0)=0$, 故 $\forall x\in U$ 有 $\|R(x)\|\leqslant\varepsilon\|x\|$. 若 $\|x\|\leqslant\dfrac{\delta}{2}$, 则

$$\|T_y(x)\|\leqslant\|y\|+\|R(x)\|\leqslant\|y\|+\frac{\varepsilon\delta}{2}$$

故若 $\|y\|\leqslant\dfrac{(1-\varepsilon)\delta}{2}$, 则有 $\|x\|\leqslant\dfrac{\delta}{2}$, 从而 $\|T_y(x)\|\leqslant\dfrac{\delta}{2}$. 从而 $T_y:\overline{B\left(0,\frac{\delta}{2}\right)}\to\overline{B\left(0,\frac{\delta}{2}\right)}$,

$$\|T_y(x_1)-T_y(x_2)\|=\|R(x_2)-R(x_1)\|\leqslant\varepsilon\|x_1-x_2\|$$

故 T_y 是压缩映射. 故存在 $x\in\overline{B\left(0,\frac{\delta}{2}\right)}$ 使 $T_y(x)=x$ 即 $y-R(x)=x, y=\varphi(x)$. 因此 $\varphi(U)\supset B\left(0,\dfrac{(1-\varepsilon)\delta}{2}\right)$. □

Step 2: 令 $\psi:V\to U$ 为同胚 $\varphi:U\to V$ 的逆映射. 我们要证 $\psi\in C^r$. 假设能证 ψ 在 $\varphi(p)$ 处可微且

$$d\psi|_{\varphi(p)}=(d\varphi|_p)^{-1}\tag{$*$}$$

则类似地 $\forall y\in V$ 有 $d\psi|_y=(d\varphi|_{\varphi^{-1}(y)})^{-1}$. 从而 $d\psi$ 在 V 上连续, 故 $\psi\in C^1$. 矩阵 $\left(d\psi|_{\varphi^{-1}(y)}\right)^{-1}$ 可由 Cramer 法则写出. 利用对 r 的归纳法可知: 若 C^{r-1} 的反函数定理成立 ($r\geqslant 2$), 则 $\varphi^{-1}\in C^{r-1}$, 故 $(d\varphi|_{\varphi^{-1}})^{-1}\in C^{r-1}$ 故 $\psi\in C^r$. 因此只需证 ($*$). 类似于 Step 1, 可作如下简化:

$$p=0,\varphi(p)=0,\varphi:U\to V\text{是同胚}.d\varphi|_0=I$$

Claim:$\psi=\varphi^{-1}:V\to U$ 在 0 处可微且 $d\psi|_0=I$.

Claim 的证明. 回忆 $\varphi(x)=x+R(x), R\in C^1, dR|_0=0$, 通过缩小 U, 假设在 U 上 $\|dR\|\leqslant\dfrac{1}{2}$. 对任意 V 中元素 y, 有 $y=\varphi\circ\psi(y)=\psi(y)+R\circ\psi(y)$, 故 $\psi(y)=y-R\circ\psi(y)$. 只需证 $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{R\circ\psi(y)}{\|y\|}=0$. 而,

$$\frac{R\circ\psi(y)}{\|y\|}=\frac{R\circ\psi(y)}{\|\psi(y)\|}\cdot\frac{\|\psi(y)\|}{\|y\|}$$

且 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{R\circ\psi(y)}{\|\psi(y)\|}=0$, 故只需证 $\sup\limits_{y\in V}\dfrac{\|\psi(y)\|}{\|y\|}<+\infty$ 即可.$\forall x\in U$ 有,

$$\frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|}=\frac{\|x+R(x)\|}{\|x\|}\geqslant\frac{\|x\|-\frac{1}{2}\|x\|}{\|x\|}=\frac{1}{2}$$

故 $\forall y\in V$ 有 $\dfrac{\|y\|}{\|\psi(y)\|}\geqslant\dfrac{1}{2}$, 即 $\sup\limits_{y\in V}\dfrac{\|\psi(y)\|}{\|y\|}\leqslant 2$. □

因此反函数定理得到了证明. □

4.2 隐函数定理和微分流形

我们引入常用记号 $x^i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},(a_1,\cdots,a_n)\mapsto a_i$, 此外 $\partial_i,\partial_{x_i},\partial_{x^i}$ 同义. 从今往后, 若不加特别说明,C^r 中的 r 都要求 $r\geqslant 1$.

定理 4.2.1 (隐函数定理)**.** 令 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集, 令 $0\leqslant d\leqslant n$, 令 $k=n-d$. 令 $F=(f^1,\cdots,f^k):\Omega\to\mathbb{R}^k$ 是 C^r 映射. 令 $p\in\Omega$ 满足

$$(\partial_{d+1}F^{\mathrm{T}},\cdots,\partial_nF^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}\partial_{d+1}f^1&\cdots&\partial_nf^1\\ \partial_{d+1}f^2&\cdots&\partial_nf^2\\ \vdots&&\vdots\\ \partial_{d+1}f^k&\cdots&\partial_nf^k\end{pmatrix}$$

在 p 处可逆. 则存在 p 的领域 $U\subset\Omega$ 和开集 $V\subset\mathbb{R}^n$ 使

$$(x^1,\cdots,x^d,f^1,\cdots,f^k):U\to V$$

是 C^r-同胚.

例子. $f^1(x^1,x^2,x^3,x^4,x^5),f^2(x^1,x^2,x^3,x^4,x^5)$ 满足

$$\left.\begin{pmatrix}\partial_4f^1&\partial_5f^1\\ \partial_4f^2&\partial_5f^2\end{pmatrix}\right|_p$$

可逆, 则 (x^1,x^2,x^3,f^1,f^2) 是 p 一个邻域 U 到其像 V 的 C^r-同胚,$V\subset\mathbb{R}^5$ 是开集.

证明: 我们就以此例子为例来证明隐函数定理, 一般情况类似.

令 $\varphi=(x^1,x^2,x^3,f^1,f^2)$, 则

$$\mathrm{Jac}(\varphi)=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&&&0&0\\ &1&&0&0\\ &&1&0&0\\ \hline *&*&*&\partial_4f^1&\partial_5f^1\\ *&*&*&\partial_4f^2&\partial_5f^2\end{array}\right)$$

由假设知 $\mathrm{Jac}(\varphi)|_p$ 可逆, 故由反函数定理完成证明. □

注记. 我们想要理解 "从 $f^1, f^2 = 0$ 解出 $x^4 = g^1(x^1, x^2, x^3), x^5 = g^2(x^1, x^2, x^3)$" 它的实际含义. 简单起见, 我们把 Ω 缩小到 U. 令

$$Z(F) = Z(f^1, f^2) = \{q \in U : f^1(q) = f^2(q) = 0\}$$

考虑 $x^4|_{Z(F)}, x^5|_{Z(F)}$. 更一般地, 考虑 $h|_{Z(F)}, h \in C^r(U, \mathbb{R})$, 则我们想证明存在 $g \in C^r(V \cap (\mathbb{R}^3 \times 0))$ 使 $h = g \circ (x^1, x^2, x^3)$.

我们现在从一般的角度讨论这个问题. 令 $r \geqslant 1$.

定义 4.2.2. 令 M 为 $\mathbb{R}^n$ 的子集. 我们说 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的 C^r 的**嵌入子流形 (embedded submanifold)/正则子流形 (regular submanifold)**, 或简称为**子流形 (submanifold)**, 若 $\forall p \in M$, 存在 p 在 $\mathbb{R}^n$ 中邻域 U,$0 \leqslant d \leqslant n$, 以及 C^r-同胚 $\varphi = (\varphi^1, \cdots, \varphi^n) : U \to V$($V$ 是 $\mathbb{R}^n$ 开子集) 满足:

$$M \cap U = Z(\varphi^{d+1}, \varphi^{d+2}, \cdots, \varphi^n) := \{p \in U : \varphi^{d+1}(p) = \varphi^{d+2}(p) = \cdots = \varphi^n(p) = 0\}$$

我们说 M 在 p 处是 $\boldsymbol{d}$ **维**的.

例子. *考虑比上一例稍强的例子:*$\Omega \subset \mathbb{R}^5$ *是开集*,$f^1, f^2 : \Omega \to \mathbb{R}$ *是* C^r *的*, $\begin{pmatrix} \partial_4 f^1 & \partial_5 f^1 \\ \partial_4 f^2 & \partial_5 f^2 \end{pmatrix}$ *在* Ω *上处处可逆, 则* $M = Z(f^1, f^2)$ *是* $\mathbb{R}^5$ *的* C^r *子流形. 因为* $\forall p \in Z(f^1, f^2)$, *存在* p *邻域* $U \subset \Omega$ *使得*

$$\varphi = \left(x^1, x^2, x^3, f^1, f^2\right) : U \to V$$

是 C^r-*同胚 (注意* $(x^1, x^2, x^3, f^1, f^2)$ *在整个* Ω *上不一定是单射).*

我们回到子流形的定义.$\varphi : U \to V$ 是 C^r-同胚意味着 φ 建立了 U 和 V 的某种 "等价" . 它包括如下方面:

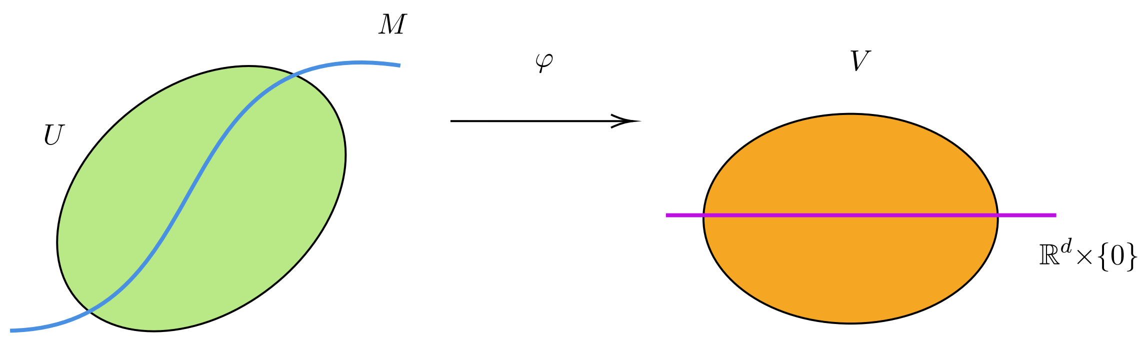
- U 上的 C^r 函数和 V 上的 C^r 函数之间的等价对应关系是

$$h \circ \varphi \in C^r(U, \mathbb{R}) \overset{\cong}{\longleftrightarrow} h \in C^r(V, \mathbb{R})$$

- U 的子集和 V 的子集之间的等价: $\varphi^1, \cdots, \varphi^n \in C^r(U, \mathbb{R})$ 对应于 $x^1, \cdots, x^n \in C^r(V, \mathbb{R})$. 因此 $M \cap U = Z\left(\varphi^{d+1}, \cdots, \varphi^n\right)$ 作为 U 的闭子集对应于

$$Z\left(x^{d+1}, \cdots, x^n\right) \cap V = V \cap \left(\mathbb{R}^d \times \{0\}\right)$$

  作为 V 的子集.



现在取 $h \in C^r(U,\mathbb{R})$, 则 $g = h \circ \varphi^{-1} \in C^r(V,\mathbb{R}).g = g \circ (x^1,\cdots,x^d,\cdots,x^n)$. 令 $\widetilde{g}(a_1,\cdots,a_d) = g(a_1,\cdots,a_d,0,\cdots,0)$. 则 $\widetilde{g} \in C^r(V\cap(\mathbb{R}^d\times\{0\}))$(这里 $V\cap(\mathbb{R}^d\times\{0\})$ 看作 $\mathbb{R}^d$ 的开子集)

$$g|_{V\cap(\mathbb{R}^d\times\{0\})} = \widetilde{g}\circ\left(x^1,\cdots,x^d\right)\Big|_{V\cap(\mathbb{R}^d\times\{0\})}$$

即 $g|_{V\cap\mathbb{R}^d}$ "能被 $x^1,\cdots,x^d$ 解出". 复合上 φ, 我们得到图上的等价表达式:

$$h|_{M\cap U} = \widetilde{g}\circ(\varphi^1,\cdots,\varphi^d)|_{M\cap U}$$

因此我们证明了"在 $Z(\varphi^{d+1},\cdots,\varphi^n)\cap U$ 上我们可以用 $\varphi^1,\cdots,\varphi^d$ 来解出 h".

例子. 回到之前的例子, 我们得到结论: 在 $Z(f^1,f^2)\cap U$ 上可以用 x^1,x^2,x^3 来解出 x^4,x^5, 即存在 $g^4,g^5 \in C^r(V\cap(\mathbb{R}^3\times\{0\}),\mathbb{R})$ 使得在 $Z(f^1,f^2)\cap U$ 上有 $x^4 = g^4\circ(x^1,x^2,x^3), x^5 = g^5\circ(x^1,x^2,x^3)$

定义 4.2.3. 为了方便讨论, 定义若 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是开集,$r\geqslant 0$, 则 $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^m$ 称为一个 **C^r-开嵌入 (C^r-open embedding)**, 若 $\varphi(\Omega)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 开子集且 $\varphi:\Omega\to\varphi(\Omega)$ 是 C^r-同胚. C^0-开嵌入即是连续开单射, 也称**开嵌入**.

我们来把上面 $\varphi^1,\cdots,\varphi^d$ 满足的性质抽象出来. 我们说 $(U\cap M,\varphi^1,\cdots,\varphi^d)$ 是**坐标卡 (coordinate chart)**. 或者说 $\varphi^1,\cdots,\varphi^d$ 是 $U\cap M$ 的**坐标**, 其含义如下:

定义 4.2.4. 令 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的 C^r-子流形,$r\geqslant 1$. 令 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是开集, 若 $\varphi^1,\cdots,\varphi^d\in C(U\cap M,\mathbb{R})$, 我们说 $(U\cap M,\varphi^1,\cdots,\varphi^d)$ 是 M 的一个**坐标卡**. 若

$$\Phi = (\varphi^1,\cdots,\varphi^d): U\cap M\to\mathbb{R}^d$$

是开嵌入, 且对任意开子集 $U_0\subset U$ 和任意 $h\in C^r(U_0,\mathbb{R})$, 存在 $g\in C^r(\Phi(U_0\cap M),\mathbb{R})$ 满足

$$h|_{U_0\cap M} = g\circ\Phi|_{U_0\cap M}$$

即在 $U_0\cap M$ 上 h 能"被 $\varphi^1,\cdots,\varphi^d$ 解出".

例子. 在子流形的定义中,$(M\cap U,\varphi^1,\cdots,\varphi^d)$ 是 M 的一个坐标卡.

例子. 在隐函数定理的论述中,$(M\cap U,\varphi^1,\cdots,\varphi^d)$ 是 $M = Z(\varphi^{d+1},\cdots,\varphi^n)$ 的一个坐标卡.

命题 4.2.5. 令 M 为 $\mathbb{R}^n$ 的 C^r-子流形. 若 $(U,\Phi) = (U,\varphi^1,\cdots,\varphi^d)$ 和 $(V,\Psi) = (V,\psi^1,\cdots,\psi^k)$ 是坐标卡, 则

$$\Psi\circ\Phi^{-1}:\Phi(U\cap V)\to\Psi(U\cap V)$$

是 C^r-同胚. 特别地, 若 $U\cap V\neq 0$ 则 $d=k$.

证明: 通过把 U,V 换成 $U\cap V$, 不妨假设 $U=V\neq\varnothing$. 显然

$$\Psi\circ\Phi^{-1}:\Phi(U)\to\Psi(U)$$

是 (拓扑) 同胚. 因为 ψ^j 能被 Φ 解出, 存在 $g^j\in C^r(\Phi(U),\mathbb{R})$ 使 $\psi^j = g^j\circ\Phi$, 因此

$$\Psi\circ\Phi^{-1} = (g^1,\cdots,g^n)$$

是 C^r 的. 类似地,$\Phi\circ\Psi^{-1}:\Psi(U)\to\Phi(U)$ 也是 C^r 的. 因此 $\Psi\circ\Phi$ 是 C^r-同胚. □

定义 4.2.6. 一个**C^r-流形** M 是一个 Hausdorff 空间, 并且附带一个开覆盖 $M=\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}}U_\alpha$, 其中每个 U_α 附带一个开嵌入 $\varphi_\alpha:U_\alpha\to\mathbb{R}^{d_\alpha}(d_\alpha=0,1,2,\cdots)$ 满足对任意 $\alpha,\beta\in\mathcal{A}$,$\varphi_\alpha$ 和 φ_β 是 **C^r-相容 (C^r-compatible)** 的, 即**转移函数 (transition function)**

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

是 C^r 的. 我们说 U_α 是 d_α 维的. 若存在 $d\in\mathbb{N}$ 使 $\forall\alpha\in\mathcal{A}$ 有 $d=d_\alpha$, 我们说 M 是**d 维**的.C^∞-流形称为**微分流形**或**光滑流形**. 集合

$$\mathcal{U}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha):\alpha\in\mathcal{A}\}$$

称为一个**图册 (atlas)**.

例子. 令 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1.M=Z(f)$ 是单位球面. 由于 f 是 C^∞ 的, 且由于 $\forall p\in M,\partial_xf(p),\partial_yf(p),\partial_zf(p)$ 中至少一个非零, 因此由隐函数定理,x,y,z 中的两个给出了 p 在 M 内邻域的一个坐标. 例如当 $p=(a,b,c)$ 满足 $c\neq0$, 则 $\partial_zf(p)\neq0$, 故 (x,y) 是 p 在 M 内邻域内的一个坐标. 这些坐标卡一起构成了 M 的一个图册, 使 M 成为一个 (紧) 微分流形, 例如若

$$V=M\cap\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3:c>0\}$$

则 (V,x,y) 就是 M 的一个坐标卡, 因为 $(x,y,f):U\to\mathbb{R}^3$ 是开嵌入且 $V=U\cap\{f\text{的零点}\}$.

4.3 光滑结构, 光滑映射, 子流形

简单起见, 我们考虑 C^∞ 的情况.

微分流形 (简称流形) 的定义有一个缺陷: 对图册的选取不唯一. 若 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 都是 Hausdorff 空间 M 上的图册, 使 M 成为微分流形. 我们希望若 $\mathcal{U}$ 的每个成员 (U,φ) 和 $\mathcal{V}$ 中的每个成员 (V,ψ) 是 C^∞-相容的 (即 $\psi\circ\varphi:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$ 是 C^∞-同胚), 则 $(M,\mathcal{U})$ 和 $(M,\mathcal{V})$ 是同一个流形, 即它们具有相同的光滑结构.

定义 4.3.1. 令 M 是 C^∞ 流形,$\mathcal{U}$ 是一个图册. 我们说 (V,ψ) 是 M 的一个**坐标卡 (chart)** 若 (V,ψ) 和 $\mathcal{U}$ 中每个成员都 C^∞ 相容. 所有和 $\mathcal{U}$ 中成员 C^∞ 相容的坐标卡显然互相间 C^∞ 相容, 故构成了包含 $\mathcal{U}$ 的更大图册, 称为**极大图册 (atlas)**, 也称为 M 的**微分/光滑/C^∞ 结构**.

例子. 若 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 是 M 上相容的图册, 则它们有共同的极大图册.

我们可以把光滑结构和拓扑结构类比,M 的拓扑结构 $\mathcal{T}_M$ 是 M 的所有开集构成的集合. 而 M 的微分结构中的元素是开集 + 坐标.

这种对微分结构的定义有一个麻烦的地方: 我们不能仿照连续映射 (开集的原像是开集) 来定义光滑映射. 例如若 M 是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球,$(\mathbb{R}^3,x,y,z)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个坐标卡. 而若令 $\iota:M\to\mathbb{R}^3$ 为嵌入映射, 则 $(\iota^{-1}(\mathbb{R}^3),x\circ\iota,y\circ\iota,z\circ\iota)=(M,x|_M,y|_M,z|_M)$ 不是 M 的坐标卡. 我们下面给出另一个微分结构的定义:

定义 4.3.2. 令 M 为 C^∞ 流形,$\mathfrak{U}$ 为图册. 若 Ω 是 M 的开子集, 函数 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 称为**光滑**的, 若 $\forall(U,\varphi)\in\mathfrak{U}, f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap\Omega)\to\mathbb{R}$光滑. 令

$$\mathscr{C}^\infty_M(U,\mathbb{R})=C^\infty(U,\mathbb{R})=\{\text{光滑函数}f:U\to\mathbb{R}\}$$

注记. 若 $f\in C^\infty(\Omega,\mathbb{R}),(V,\psi)$ 是 M 的坐标卡 (即 (V,ψ) 与 $\mathfrak{U}$ 中成员 C^∞ 相容), 则 $f\circ\psi^{-1}:\psi(V\cap\Omega)\to\mathbb{R}$ 是 C^∞ 的.

例子. 令 (U,φ) 是坐标卡, 则 φ 的每个分量 $\varphi^i:U\to\mathbb{R}$ 是 C^∞ 的.

定义 4.3.3. 令 M 为 C^∞ 流形. 定义$\mathscr{C}^\infty_{\boldsymbol{M},\mathbb{R}}$ 或$\mathscr{C}^\infty_{\boldsymbol{M}}$ 为集合

$$\{(\Omega,f):\Omega\text{是}M\text{开子集},f\in C^\infty(\Omega,\mathbb{R})\}$$

$\mathscr{C}^\infty_M$ 称为 M 的 **(局部) 光滑函数层 (sheaf of smooth functions)**.$\mathscr{C}^\infty_M$ 称为 M 的微分/光滑结构.

我们看到, 图层 $\xrightarrow{\text{定义}}$ $\mathscr{C}^\infty_M$. 且用图层和极大图册定义的 $\mathscr{C}^\infty_M$ 相同. 接下来我们说明 $\mathscr{C}^\infty_M$ $\xrightarrow{\text{决定}}$ 极大图册.

命题 4.3.4. *令 $V\subset M$ 为开子集,$\psi:V\to\mathbb{R}^d$ 为映射, 以下等价:*

(1) (V,ψ) 是坐标卡, 即它与 M 的图册 $\mathfrak{U}$ 是 C^∞-相容的.

(2) $\psi:V\to\mathbb{R}^d$ 是开嵌入, 且任意开集 $\Omega\subset V,\forall f\in C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$, 存在 $g\in C^\infty(\psi(\Omega),\mathbb{R})$ 满足 $f=g\circ\psi|_\Omega$(即 f 在 Ω 上能被 ψ 解出).

证明: 假设 (1), 则由 f 光滑可知 $f\circ\psi^{-1}:\psi(\Omega)\to\mathbb{R}$ 光滑, 将此映射定义为 g, 则 (2) 得证.

假设 (2), 任取 $(U,\varphi)\in\mathfrak{U}$. 令 $\Omega=U\cap V$. 不妨假设 $\Omega\neq\varnothing$, 记 $\varphi=(\varphi^1,\cdots,\varphi^d)$, 其中 $\varphi^i:U\to\mathbb{R}$ 光滑. 则存在 $g^i\in C^\infty(\psi(\Omega),\mathbb{R})$ 满足

$$\varphi^i=g^i\circ\psi|_{U\cap V}$$

因此 $\varphi^i\circ\psi^{-1}:\psi(U\cap V)\to\mathbb{R}$ 光滑, 从而 $\varphi\circ\psi^{-1}:\psi(U\cap V)\to\mathbb{R}^d$ 光滑. 类似地, 由于 (U,φ) 满足条件 (2), 若记 $\psi=(\psi^1,\cdots,\psi^k)$, 则每个 ψ^j 在 $U\cap V$ 上能被 φ 解出. 由此知 $\psi\circ\varphi:\varphi(U\cap V)\to\mathbb{R}^d$ 光滑. 因此 (U,φ) 和 (V,ψ) 是 C^∞-相容的. □

注记. 我们得到极大图册 $\underset{\text{决定}}{\overset{\text{定义}}{\rightleftarrows}}$ $\mathscr{C}^\infty_M$. 且决定 $\circ$ 定义 $=\mathrm{id}$. 因此用极大图册和 $\mathscr{C}^\infty_M$ 定义的微分结构具有相同的同一性.

记号: 若 $\varphi:X\to Y$ 为集合间的映射,$f:Y\to\mathbb{R}$, 则$\boldsymbol{\varphi^*f}=f\circ\varphi$.

命题 4.3.5. 令 $F: M \to N$ 为 C^∞-流形之间的连续映射. 令 $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ 分别为 M, N 的坐标卡. 则以下等价:

(1) $F^*\mathscr{C}_N^\infty \subset \mathscr{C}_M^\infty$. 即 $\forall \Omega$ 为 N 的开集,$\forall f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$,$F^*f = f \circ F : F^{-1}(\Omega) \to \mathbb{R}$ 是 C^∞ 的.

(2) $\forall (U, \varphi) \in \mathcal{U}, \forall (V, \psi) \in \mathcal{V}$, 有:

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \to \mathbb{R}^n$$

是 C^∞ 的.

若以上任意一条满足, 我们说 F 是 $\boldsymbol{C^\infty}$**-映射**.

证明: 假设 (1), 记 $\psi = (\psi^1, \psi^2, \cdots), \varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \cdots)$. 则 $\psi^j \in \mathscr{C}_N^\infty$. 由 (1) 知

$$\psi^j \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \to \mathbb{R}^n$$

是 C^∞ 的,(2) 得证.

假设 (2),$\forall f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ 要证 $f \circ F : F^{-1}(\Omega) \to \mathbb{R}$ 光滑, 意味着证 $\forall (U, \varphi) \in \mathcal{U}, f \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V \cap \Omega)) \to \mathbb{R}$ 光滑即可 (因为所有 $F^{-1}(V)$ 组成了 M 的开覆盖). 在 $\varphi(U \cap F^{-1}(V) \cap F^{-1}(\Omega))$ 上

$$f \circ F \circ \varphi^{-1} = f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$$

由于 $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ 光滑, 且 $f \circ \psi^{-1}$ 也光滑, 因此命题得证. $\square$

命题 4.3.6. 若 $F: M \to N, G: N \to P$ 是 C^∞ 流形的 C^∞ 映射, 则 $G \circ F : M \to P$ 光滑.

定义 4.3.7. 若 $F: M \to N$ 是双射, 且 F 和其逆映射 $F^{-1}: N \to M$ 是 C^∞ 的, 则说 F 是一个**微分同胚 (diffeomorphism)**.

定义 4.3.8. 令 M 是 C^∞ 流形 N 的子集, 称 M 是 N 的 **(正则/嵌入) 子流形**, 若 $\forall p \in M$, 存在 N 的坐标卡 (V, ψ) 满足 $p \in V$, 且若记 $\psi = (\psi^1, \cdots, \psi^n)$ 则

$$M \cap V = Z(\psi^{d+1}, \cdots, \psi^n)$$

用 $\mathscr{C}_M^\infty$ 作为微分结构的定义很容易处理子流形 C^∞-结构的唯一性问题:

定理 4.3.9. 令 M 是 C^∞ 流形 N 的子集, 假设 $\{(V_\alpha, \psi_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ 是 N 的一族坐标卡 (不一定构成图册) 满足 $M \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$, 且 $\forall \alpha \in \mathcal{A}$, 若记 $\psi_\alpha = (\psi_\alpha^1, \cdots, \psi_\alpha^{n_\alpha})$, 则存在 $0 \leqslant d_\alpha \leqslant n_\alpha$ 使

$$M \cap V_\alpha = Z(\psi_\alpha^{d_\alpha+1}, \cdots, \psi_\alpha^{n_\alpha})$$

则 M 是 C^∞ 流形,$\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ 是 M 的一个图册, 其中 $U_\alpha = M \cap V_\alpha, \varphi_\alpha = (\psi_\alpha^1, \cdots, \psi_\alpha^{d_\alpha})|_{U_\alpha}$. 且对任意 M 内开集 Ω 和函数 $f: \Omega \to \mathbb{R}$, 以下等价:

(a) $f \in \mathscr{C}_M^\infty$

(b) $\forall p \in \Omega$, 存在 p 在 N 内邻域 V 和 $\widetilde{f} \in C^\infty(V, \mathbb{R}) = \mathscr{C}_N^\infty(V)$ 满足 $f|_{\Omega \cap V} = \widetilde{f}|_{\Omega \cap V}$.

由此命题可知, 不同 (V_α,ψ_α) 的选取定义出来的 $\mathscr{C}_M^\infty$ 的微分结构 $\mathscr{C}_M^\infty$ 唯一. 因此我们能谈论 N 的一个子集的唯一的微分结构.

证明: 我们令满足 (b) 的所有 f 构成的集合记为$\mathscr{C}_N^\infty|_M$. 简单起见, 假设 $n=n_\alpha$ 和 $d=d_\alpha$ 与 α 无关 (证法相同).

Step 1: 我们先证 $\mathfrak{U}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha):\alpha\in\mathcal{A}\}$ 是 M 的图册. 这与 $\mathbb{R}^n$ 子流形的证法基本相同; 若 Ω 是 $U_\alpha=V_\alpha\cap M$ 的开子集且 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 属于 $\mathscr{C}_N^\infty|_M$, 则 f 能被 $\psi_\alpha^1,\cdots,\psi_\alpha^d$ 解出. (这是因为: 由于 ψ_α 是 V_α 到 $\mathbb{R}^n$ 开子集 $\psi_\alpha(V_\alpha)$ 的微分同胚, 我们不妨把 V_α 和 $\psi_\alpha(V_\alpha)$ 通过 ψ_α 等同起来. 从而 V_α 是 $\mathbb{R}^n$ 开子集,$(\psi_\alpha^1,\cdots,\psi_\alpha^n)=(x^1,\cdots,x^n)$ 从而

$$M\cap V_\alpha=Z(\psi_\alpha^{d+1},\cdots,\psi_\alpha^n)=V_\alpha\cap(\mathbb{R}^n\times\{0\})$$

Ω 是 $V_\alpha\cap(\mathbb{R}^d\times\{0\})$ 的开子集, 从而可看成 $\mathbb{R}^d$ 开子集. 由 $f\in\mathscr{C}_M^\infty$ 知 f 局部地来源于 $\mathbb{R}^d$ 某开集上的 C^∞ 函数限制在 $V_\alpha\cap(\mathbb{R}^d\times\{0\})$ 上. 从而 f 局部地 (从而整体地) 是属于 $\mathscr{C}_{\mathbb{R}^d}^\infty$ 的. 故 f 能被 $x^1,\cdots,x^d$ 解出, 即 $f=g\circ(x^1,\cdots,x^d),g:V_\alpha\cap(\mathbb{R}^d\times\{0\})\to\mathbb{R}$ 光滑, 故 $f=g\circ(\psi_\alpha^1,\cdots,\psi_\alpha^d)$.)

记 $\varphi_\alpha^i=\psi_\alpha^i|_{U_\alpha},\varphi_\alpha=(\varphi_\alpha^1,\cdots,\varphi_\alpha^d)$. 则 $\psi_\alpha=(\psi_\alpha^1,\cdots,\psi_\alpha^n):V_\alpha\to\psi_\alpha(V_\alpha)$ 是同胚知 $\psi_\alpha:V_\alpha\cap M\to\psi_\alpha(V_\alpha)\cap\left(\mathbb{R}^d\times\{0\}\right)$ 是同胚, 即

$$\varphi_\alpha:U_\alpha\to\varphi_\alpha(U_\alpha)$$

是同胚, 且 $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 开子集. 类似地,$\varphi_\beta:U_\beta\to\varphi_\beta(U_\beta)$ 是同胚. 由每个 φ_β^i 可被 φ_α 解出知

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^i:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

是 C^∞ 的. 类似地, 其逆映射也是 C^∞ 的. 故 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 和 (U_β,φ_β) 是 C^∞ 相容的, 故 $\mathfrak{U}$ 是 M 图册.

Step 2: 要证任意开集 $\Omega\subset M$ 和 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 有 $f|_U\in\mathscr{C}_M^\infty\iff f|_U\in\mathscr{C}_N^\infty|_M$. 因此, 通过缩小 N 到 p 的一个邻域, 通过 C^∞ 同胚不妨假设 $N\subset\mathbb{R}^n$, 且 $M=N\cap(\mathbb{R}^d\times\{0\})$ 且有 α 使 $V_\alpha=N,\psi_\alpha=(x^1,\cdots,x^n)$. 因为 $(M,x^1,\cdots,x^d)$ 是 M 坐标卡, 故 $f\in\mathscr{C}_M^\infty$ 意味着 f 作为通常意义下的 $\mathbb{R}^d$ 开子集上的函数是 C^∞ 的. 而 $f\in\mathscr{C}_N^\infty|_M$ 意味着 f 局部的是 $\mathbb{R}^n$ 开子集上 C^∞ 函数限制到 $\mathbb{R}^d\times\{0\}$ 上. 显然这两种光滑性等价. $\square$

例子. *令 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是开集,$0\leqslant d\leqslant n,k=n-d,F=(f^1,\cdots,f^k):\Omega\to\mathbb{R}^k$ 是 C^∞ 的. 假设 $\mathrm{Jac}(F)$ 处处 (作为 $k\times n$ 矩阵) 满秩. 令 $M=Z(F).\forall p\in M,\mathrm{Jac}(F)$ 的某 k 列 (不妨假设是最后 k 列) 和 k 行组成 $k\times k$ 可逆矩阵. 故由隐函数定理, 存在 p 在 Ω 内邻域 $V\subset\Omega$ 使*

$$\left(x^1,\cdots,x^d,F\right):V\to\mathbb{R}^n$$

是 C^∞ 是开嵌入. 从而由 $M\cap V=Z(F|_V)$ 和前一定理知 M 是 $\mathbb{R}^n$ 子流形.$(M\cap V,x^1,\cdots,x^d)$ 是 M 的一个坐标卡, 且 $\mathscr{C}_{M\cap V}^\infty$ 中所有元素能被 $x^1,\cdots,x^d$ 解出. 故 $\forall h\in\mathscr{C}_{\mathbb{R}^n}^\infty(V)$, 存在 g:

$$g\in\mathscr{C}_{\mathbb{R}^d}^\infty((x^1,\cdots,x^d)(M\cap V))=\mathscr{C}_{\mathbb{R}^d}^\infty(\pi_d(M\cap V))$$

使 $h|_{M\cap V}=g\circ\pi_d$. 把 V 换成 V 的开子集也类似.

注记. 隐函数定理给了一个有效的办法来证明 $\mathbb{R}^n$ 开集 Ω 上一些光滑函数 $f^1,\cdots,f^k$ 的零点集 M 是 $\mathbb{R}^n$ 子流形 (其光滑结构唯一:M 上的光滑函数局部地由 $\mathbb{R}^n$ 光滑函数的限制得到) 并且表明 $\mathbb{R}^n$ 本身的标准坐标中的 n 个 $x^1,\cdots,x^d$ 给出 M 的局部坐标, 从而 M 上的光滑函数能局部地"用 $x^1,\cdots,x^d$ 解出". 特别地,$x^{d+1}|_M,\cdots,x^n|_M$ 能"用 $x^1,\cdots,x^d$ 解出". 若解出

$$x^{d+1}|_M=g^{d+1}(x^1,\cdots,x^d)|_U,\cdots,x^n|_M=g^n(x^1,\cdots,x^d)|_U$$

其中 U 是 M 开集.$(a_1,\cdots,a_d)\mapsto\left(a_1,\cdots,a_d,g^{d+1}\left(a_\bullet\right),\cdots,g^n\left(a_\bullet\right)\right)$ 给出了坐标 $\left.\left(x^1\cdots,x^d\right)\right|_U:U\to\pi_d(U)$ 的逆映射.

更一般地, 反函数定理表明, 若 $\varphi^1,\cdots,\varphi^d:\Omega\to\mathbb{R}$ 光滑,$p\in\Omega$, 且 $\mathrm{Jac}(\varphi^1,\cdots,\varphi^d,f^1,\cdots,f^k)|_p$ 可逆, 则 $\varphi^1,\cdots,\varphi^d$ 给出了 M 在 p 处一个邻域的坐标. 因此,M 的参数化不必非得从 $\mathbb{R}^n$ 的标准坐标 $x^1,\cdots,x^n$ 中选.

4.4 切向量和余切向量

定义 4.4.1. 令 M 为微分流形. 一个 C^∞ 映射 $\gamma:(a,b)\to M$ 称为 **(光滑) 道路**. 令 $p\in M$, 令

$$T_pM=\{\text{光滑道路}\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M\text{满足}\varepsilon>0,\gamma(0)=p\}/\sim$$

其中 $\gamma_1\sim\gamma_2$ 若对某个包含 p 的坐标卡 (U,φ) 有 $(\varphi\circ\gamma_1)'(0)=(\varphi\circ\gamma_2)'(0)$.$T_pM$ 称为 M 在 p 处的**切空间**. 其中元素称为**切空间**. 我们把光滑道路 γ (若 $\gamma(0)=p$) 在 T_pM 中的等价类记作 $\gamma'(0)$. 更一般地, 若 $\gamma:(a,b)\to M$ 是光滑道路,$t_0\in(a,b)$, 我们把 $\gamma(t+t_0)$(定义在 $(a-t_0,b-t_0)\to M$) 在 $T_{\gamma(t_0)}M$ 中的等价类记为

$$\gamma'(t_0)=\left.\frac{d}{dt}\gamma\right|_{t_0}$$

称为 γ 在 t_0 处的**导数**.

注记. 若在一个包含 p 的坐标卡 (U,φ) 中有 $(\varphi\circ\gamma_1)'(0)=(\varphi\circ\gamma_2)'(0)$, 则对另一个 (V,ψ) 也有 $(\psi\circ\gamma_1)'(0)=(\psi\circ\gamma_2)'(0)$. 这是因为

$$(\psi\circ\gamma_i)'(0)=\left(\psi\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ\gamma_i\right)'(0)=\mathrm{Jac}\left(\psi\circ\varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)}(\varphi\circ\gamma_i)'(0)$$

现在, 若 γ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑道路, 则 $\gamma'(t_0)$ 有两种含义: 作为 $T_{\gamma(t_0)}\mathbb{R}^n$ 中元素, 作为 $\mathbb{R}^n$ 中元素 (每个分量求导). 在说明这两个意义相同之前, 我们把后者记为 $\mathrm{Jac}\,\gamma|_{t_0}$ 或 $\left.\begin{pmatrix}\partial_t\gamma^1\\ \vdots\\ \partial_t\gamma^n\end{pmatrix}\right|_{t_0}$. 如上定义方式的难点在于定义 T_pM 的线性结构.

定义 4.4.2.

$$\mathscr{C}^\infty_{M,p}=C^\infty_pM=\{f\in C^\infty(U,\mathbb{R}):U\text{是}p\text{邻域}\}/\sim$$

其中 $f\sim g(g\in C^\infty(V,\mathbb{R}))$ 若存在 p 邻域 $W\subset U\cap V$ 使 $f|_W=g|_W$.$C^\infty_p(M)$ 称为光滑函数层 $\mathscr{C}^p_M$ 在 p 处的**茎 (stalk)**.$\mathscr{C}^\infty_{M,p}$ 中元素称为**芽 (germ)**. 用函数的加法和数乘显然能使 $\mathscr{C}^\infty_{M,p}$ 成为一个 $\mathbb{R}$-线性空间.

定义 4.4.3. 若 $f \in \mathscr{C}^\infty_{M,p}$, 我们称 $df|_p = 0$(称为 ***f* 在 *p* 处的微分是 0**) 若对于某个包含 p 的坐标卡 (U,φ) 且满足 $f \in C^\infty(U,\mathbb{R})$, 我们有 $\mathrm{Jac}(f\circ\varphi^{-1})|_{\varphi(p)} = 0$. 利用 chain rule 不难得知此定义与坐标卡的选取无关. 且 $\{f \in \mathscr{C}^\infty_{M,p} : df|_p = 0\}$ 是 $\mathscr{C}^\infty_{M,p}$ 的 $\mathbb{R}$-线性子空间. 我们定义 M 在 p 处的**余切空间**为

$$T_p^*M = \mathscr{C}^\infty_{M,p}/\{f \in \mathscr{C}^\infty_{M,p} : df|_p = 0\}$$

若 $f \in \mathscr{C}^\infty_M$ 定义在 p 附近, 则其在 T_p^*M 中的等价类称为 f 在 p 处的**微分** $\boldsymbol{df|_p}$.

例子. 令 M 是 $\mathbb{R}^n$ 开子集,$(x^1,\cdots,x^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的标准坐标. 令 $p\in M$, 则 $dx^1|_p,\cdots,dx^n|_p$ 是 $T_p\mathbb{R}^n$ 的一组基. 若 $f \in \mathscr{C}^\infty_{M,p}$, 则

$$df|_p = \sum_{i=1}^n \partial_i f(p)\cdot dx^i|_p = \mathrm{Jac}\, f|_p \cdot \left.\begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \end{pmatrix}\right|_p$$

证明: $\forall f \in \mathscr{C}^\infty_{M,p}$, $\mathrm{Jac}(f - f(p))|_p = (\partial_1 f(p),\cdots,\partial_n f(p))$. 令

$$g = f - f(p) - \sum_{i=1}^n \partial_i f(p) x^i$$

则 $\partial_i g(p) = 0$. 故 $\mathrm{Jac}\, g|_p = 0$. 故 $f - \sum_{i=1}^n \partial_i f(p) x^i = f(p) + g$ 有零微分, 故

$$df|_p - \sum_{i=1}^n \partial_i f(p) dx^i|_p = 0$$

故 $dx^1|_p,\cdots,dx^n|_p$ 张成 T_p^*M. 假设 $a_1 dx^1\big|_p + \cdots + a_n dx^n\big|_p = 0$. 则 $f = a_1x^1+\cdots+a_nx^n$ 在 p 处有零微分. 故 $0 = \partial_i f|_p = a_i$. 这证明了 $dx^1|_p,\cdots,dx^n|_p$ 线性无关. □

命题 4.4.4. *对任意 $\gamma'(t_0) \in T_pM$, 则 $\gamma'(t_0)$ 给出了 $T_p^*(M)$ 上一个 (良定义的) 线性泛函*

$$T_p^*(M) \to \mathbb{R},\ df|_p \mapsto \left.\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)\right|_{t=t_0}$$

这给出了映射 $T_p(M) \to T_p^*(M)^*$, 它是双射. 我们把 $T_p(M)$ 和 $T_p^*(M)$ 的对偶空间 $T_p^*(M)^*$ 等同, 并记

$$\left.\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)\right|_{t=t_0} = df|_p(\gamma'(t_0)) = df(\gamma'(t_0)) = \langle df|_p, \gamma'(t_0)\rangle$$

这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是线性空间 $T_p^*(M)$ 与其对偶空间之间的标准的双线性配对.

证明: 通过缩小 M, 假设 M 同胚与 $\mathbb{R}^n$ 的开子集, 不妨假设 M 就是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集. 若 $f \in \mathscr{C}^\infty_{M,p}$,

$$\left.\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)\right|_{t=t_0} = \mathrm{Jac}\, f|_p \cdot \mathrm{Jac}\,\gamma|_{t=t_0} = \sum_{j=1}^n \partial_j f(p) \left.\frac{d\gamma^j}{dt}\right|_{t=t_0} \qquad (*)$$

由 $(*)$ 可知若把 f 换成 $\widetilde{f}$ 满足 $\mathrm{Jac}(f-\widetilde{f})|_p = 0$ 或把 γ 换成 $\widetilde{\gamma}$ 满足 $\mathrm{Jac}\,\gamma|_{t_0} = \mathrm{Jac}\,\widetilde{\gamma}|_{t_0}$, 则 $(*)$ 的值不变. 因此我们有良定义的映射 $\Phi : T_pM \to (T_p^*M)^*$. 若 $\Phi(\gamma) = \Phi(\widetilde{\gamma})$, 则 $\forall f \in \mathscr{C}^\infty_{M,p}$ 有 $(f\circ\gamma)'\big|_{t_0} = (f\circ\widetilde{\gamma})'\big|_{t_0}$. 取 $f = x^i$, 得:

$$\left.\frac{d}{dt}\gamma^i\right|_{t_0} = \left.\frac{d}{dt}\widetilde{\gamma}^i\right|_{t_0}$$

故 $\mathrm{Jac}\,\gamma|_{t_0} = \mathrm{Jac}\,\widetilde{\gamma}|_{t_0}$. 故 $\left.\frac{d}{dt}\gamma\right|_{t_0}$ 和 $\left.\frac{d}{dt}\widetilde{\gamma}\right|_{t_0}$ 是 T_pM 中相同元素. 因此 Φ 是单射. 下证 Φ 是满射.

回忆 $\left.dx^1\right|_p, \cdots, \left.dx^n\right|_p$ 是 T_p^*M 一组基, 取 $\Lambda \in (T_p^*M)^*$. 令 $a^i = \Lambda(dx^i|_p)$. 取 $\gamma(t) = \begin{pmatrix} a^1 t \\ \vdots \\ a^n t \end{pmatrix}$, 则有

$$\left\langle \left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_0, dx^i \right\rangle = \left.\frac{d}{dt} x^i \circ r\right|_0 = \left.\frac{dr^i}{dt}\right|_0 = a^i$$

因此 $\Phi\left(\left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_0\right) = \Lambda$. □

若 V 是有限维线性空间,$e_1, \cdots, e_n \in V$ 是一组基. 则其**对偶基**为 V^* 一组基 $\check{e^1}, \cdots, \check{e^n}$, 唯一地由

$$\check{e^i}(e^j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

确定. 若 $v \in V$, 则 $v = \sum_i \check{e^i}(v) e_i = \left\langle v, \check{e^i} \right\rangle e_i$. 这里 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 V 和 V^* 之间自然的双线性配对.

定义 4.4.5. 令 $(U, \varphi) = (U, \varphi^1, \cdots, \varphi^n)$ 为 M 的坐标卡. 则 $\left.d\varphi^1\right|_p, \cdots, \left.d\varphi^n\right|_p \in T_p^*M$ 在 T_pM 中的对偶基记为

$$\left.\frac{\partial}{\partial \varphi^1}\right|_p, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial \varphi^n}\right|_p$$

从而 $\left.\left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi^i}, d\varphi^j \right\rangle\right|_p = \delta_{i,j}$. 注意 $df|_p$ 只依赖于 f, 而 $\left.\frac{\partial}{\partial \varphi^1}\right|_p$ 不只依赖于 φ^1, 也依赖于 $\varphi^2, \cdots, \varphi^n$.

定义 4.4.6. $TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$ 和 $T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M$ 分别称为 M 的**切丛**和**余切丛**. 若 $U \subset M$ 是开集, 一个函数 $X : p \in U \mapsto X_p \in T_pM$ 称为 **(光滑切) 向量场**若 $\forall$ 开集 $V \subset U, \forall f \in C^\infty(V, \mathbb{R})$ 有

$$Xf \equiv \langle df, X \rangle : p \in V \mapsto \langle df|_p, X_p \rangle \in \mathbb{R}$$

是 C^∞ 的. 这样的函数构成的集合记为 $TM(U)$. 则 $TM(U)$ 是 $C^\infty(U, \mathbb{R})$-模: 若 $g \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, 则 $gX : p \in U \mapsto g(p)X_p$ 是向量场.

定义 4.4.7. 若 $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, 定义 $\boldsymbol{df}$: $U \to T^*M, p \in U \mapsto df|_p \in T_p^*M$.

注记. 由对偶基性质, 若 $p \in U, (U, \varphi)$ 是 M 坐标卡, 则 $df|_p = \sum_i \left.\left\langle df, \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right\rangle\right|_p \cdot \left.d\,\varphi^i\right|_p$, 因此

$$df = \sum_i \frac{\partial}{\partial \varphi^i} f \cdot d\varphi^i$$

命题 4.4.8. 令 $(U, \varphi) = (U, \varphi^1, \cdots, \varphi^n)$ 为 M 的坐标卡. 则 $\frac{\partial}{\partial \varphi^i} : p \in U \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\right|_p \in T_pM$ 是向量场. 且若 $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, 则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \varphi^i}\right|_p \equiv \left.\left\langle df, \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right\rangle\right|_p = \partial_i \left(f \circ \varphi^{-1}\right)\big|_{\varphi(p)} \tag{$*$}$$

故 $\frac{\partial f}{\partial \varphi^i} = \partial_i (f \circ \varphi^{-1})\big|_\varphi$.

证明: 任取开集 $V \subset U, f \in C^\infty(V,\mathbb{R})$, 我们来证明 $\left\langle df, \frac{\partial}{\partial x^i}\right\rangle$ 光滑, 并由 $(*)$ 给出.$\varphi : V \overset{\cong}{\rightarrow} \varphi(V)$ 建立了 $\varphi(V)$ 上函数 $f\circ\varphi^{-1}, \varphi^i$ 和 V 上函数 f, x^i 的等价. 因此

$$\left\langle df, \frac{\partial}{\partial \varphi^i}\right\rangle\Big|_p = \left\langle d\left(f\circ\varphi^{-1}\right), \frac{\partial}{\partial x^i}\right\rangle\Big|_q$$

这里 $q = \varphi(p)$. 令 $g = f\circ\varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(V),\mathbb{R})$, 则要证 $\left\langle dg, \frac{\partial}{\partial x^i}\right\rangle = \partial_i g$.

我们在前面例子中算过 $dg|_q = \sum\limits_i \partial_i g(p)\cdot dx^i$, 因此

$$\left\langle dg, \frac{\partial}{\partial x^i}\right\rangle\Big|_q = \sum_j \partial_j g(q)\left\langle dx^j, \frac{\partial}{\partial x^i}\right\rangle\Big|_q = \partial_i g(p)$$

□

例子. 令 M 为 $\mathbb{R}^n$ 开子集,$f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, 则 $\frac{\partial}{\partial x^i}f$(用 $\left\langle df, \frac{\partial}{\partial x^i}\right\rangle$ 定义) 和 $\partial_i f$ 是相同的 M 上的光滑函数 $\frac{\partial}{\partial x^i}f = \partial_i f$. 令 $p\in M$, 令 $\gamma(t) = (p^1,\cdots,p^i+t,\cdots,p^n)^{\mathrm{T}}$, 则

$$\langle df|_p, \gamma'(0)\rangle = \frac{df\circ r}{dt}\Big|_{t=0} = \partial_i f|_p = \left\langle df, \frac{\partial}{\partial x^i}\right\rangle$$

因此 $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \frac{d}{dt}\left(p^1,\cdots,p^i+t,\cdots,p^n\right)\Big|_{t=0}$.

命题 4.4.9. 令 $(U,\varphi),(V,\psi)$ 是 M 的两个坐标卡, 则在 $U\cap V$ 上任意点有

$$d\psi^j|_p = \sum_i \frac{\partial}{\partial\varphi^i}\psi^j(p)\cdot d\varphi^i|_p$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi^i}\Big|_p = \sum_j \frac{\partial}{\partial\varphi^i}\psi^j(p)\cdot\frac{\partial}{\partial\psi^j}\Big|_p$$

这里 $\frac{\partial}{\partial\varphi^i}\psi^j(p) = \partial_i\left(\psi^j\circ\varphi^{-1}\right)|_{\varphi(p)}$. 故

$$\begin{pmatrix} d\psi^1 \\ \vdots \\ d\psi^n\end{pmatrix}_p = \mathrm{Jac}(\psi\circ\varphi^{-1})_{\varphi(p)}\begin{pmatrix} d\varphi^1 \\ \vdots \\ d\varphi^n\end{pmatrix}_p$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varphi^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\varphi^n}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial\psi^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\psi^n}\right)_p\cdot\mathrm{Jac}\left(\psi\cdot\varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)}$$

证明: 第一个已证, 第二个也是用对偶基的基本性质

$$\frac{\partial}{\partial\varphi^i} = \sum_j\left\langle\frac{\partial}{\partial\varphi^i}, d\psi^j\right\rangle\frac{\partial}{\partial\psi^j} = \sum_j\frac{\partial}{\partial\varphi^i}\psi^j\cdot\frac{\partial}{\partial\psi^j}$$

□

注记. $df=\sum_i \frac{\partial f}{\partial \varphi^i}d\varphi^i$ 也可改写成

$$df_p = \mathrm{Jac}\left(f\circ\varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)}\begin{pmatrix} d\varphi^1 \\ \vdots \\ d\varphi^n \end{pmatrix}_p$$

注记. 有 $\left(\frac{\partial}{\partial\varphi^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\varphi^n}\right)_p\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=\left(\frac{\partial}{\partial\psi^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\psi^n}\right)_p \mathrm{Jac}\left(\psi\circ\varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 因此同一个 T_pM 向量在基 $(\frac{\partial}{\partial\varphi^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\varphi^n})$ 下坐标是 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. 则在基 $(\frac{\partial}{\partial\psi^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\psi^n})$ 下坐标是 $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\mathrm{Jac}(\psi\circ\varphi^{-1})|_{\varphi(p)}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

若 $f,g\in C^\infty(U)$. 令

$$gdf : p\in U\mapsto g(p)df|_p\in T_p^*(U)$$

则不难验证有 **Leibniz 公式**:$d(fg)=fdg+gdf$. 即

$$d(fg)|_p=f(p)dg|_p+g(p)df|_p$$

证明: 不妨假设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集, 则 $\forall 1\leqslant i\leqslant n$ 有

$$\begin{aligned}\left\langle d(fg),\frac{\partial}{\partial x^i}\right\rangle &= \partial_i(fg)=(\partial_i f)\cdot g+f\cdot\partial_i g\\ &= g\cdot\left\langle df,\frac{\partial}{\partial x^i}\right\rangle+f\cdot\left\langle dg,\frac{\partial}{\partial x^i}\right\rangle\\ &= \left\langle fdg+gdf,\frac{\partial}{\partial x^i}\right\rangle\end{aligned}$$

□

定义 4.4.10. 令 $F:M\to N$ 为光滑映射.$p\in M,q=F(p)$. 定义线性映射$\boldsymbol{F}^*$: $T_q^*N\to T_p^*M$ 为(若 $f\in\mathscr{C}^\infty_{N,q}$)

$$F^*\left(df|_q\right)=d(f\circ F)|_p$$

这个映射是良定义的且显然线性.

良定义的证明. 不妨假设 M,N 分别是 $\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n$ 开子集, 则

$$\begin{aligned} d\left(f\circ F\right)|_p &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}(f\circ F)\bigg|_p \cdot dx^i|_p \\ &= \mathrm{Jac}(f\circ F)\begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \end{pmatrix}\Bigg|_p \\ &= \mathrm{Jac}(f)|_q\cdot \mathrm{Jac}(F)|_p\cdot \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \end{pmatrix}\Bigg|_q \end{aligned}$$

只依赖于 $\mathrm{Jac}(f)|_q$. □

定义 4.4.11. 在以上定义中, 令$\boldsymbol{dF}$: $T_pM \to T_qN$ 为 F^* 的转置, 称为 F 的**微分**. 即 $\forall f\in \mathscr{C}^\infty_{M,p}, \gamma'(t_0)\in T_pM$, 有

$$\left\langle dF\cdot\gamma'\left(t_0\right), df|_p\right\rangle = \left\langle \gamma'\left(t_0\right), F^*df|_\rho\right\rangle$$

等价定义.$dF\cdot\gamma'(t_0)=(F\circ\gamma)'(t_0)$.

命题 4.4.12. 令 $F:M\to N$ 为光滑映射,$p\in M, q=F(p)$. 令 $(U,\varphi)=(U,\varphi^1,\cdots,\varphi^m)$ 和 $(V,\psi)=(V,\psi^1,\cdots,\psi^n)$ 分别为 p 和 q 附近的坐标卡, 且 $F(U)\subset V$, 则

$$F^*\begin{pmatrix} d\psi^1 \\ \vdots \\ d\psi^n \end{pmatrix}_q = \mathrm{Jac}\left(\psi\circ F\circ\varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)}\cdot\begin{pmatrix} d\varphi^1 \\ \vdots \\ d\varphi^m \end{pmatrix}_p$$

$$dF\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\varphi^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\varphi^m}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial\psi^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\psi^n}\right)_q\cdot\mathrm{Jac}\left(\psi\circ F\circ\varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)}$$

证明: 由

$$F^*df|_q = d(f\circ F)|_p = \mathrm{Jac}\left(f\circ F\circ\varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)}\begin{pmatrix} d\varphi^1 \\ \vdots \\ d\varphi^n \end{pmatrix}_p$$

把 f 换成 φ^i 即得第一个公式.

(也可由 $F^*d\psi^i = d\left(\psi^i\circ F\right) = \sum_j\left(\frac{\partial}{\partial\varphi^j}\psi^i\circ F\right)\cdot d\varphi^j = \sum_j\partial_j\left(\psi^i\circ F\cdot\varphi^{-1}\right)\cdot d\varphi^j$ 计算得)

第二个公式由 $\left\langle dF\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi^j}\cdot d\psi^i\right\rangle = \left\langle\frac{\partial}{\partial\varphi j}, F^*d\psi^i\right\rangle$ 以及上面关于 $F^*d\psi^i$ 的计算公式得到. 也可由如下事实得到. □

命题 4.4.13. 令 $T:X\to Y$ 为有限维线性空间之间的线性映射. 令 $e_1,\cdots,e_m$ 为 X 一组基,$f_1,\cdots,f_n$ 为 Y 一组基. 对偶基分别为 $\check{e_1},\cdots,\check{e_m}\in X^*, \check{f_1},\cdots,\check{f_n}\in Y^*$. 假设 $m\times n$ 矩阵 A 满足

$$T\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

则 T 的转置 $T^{\mathrm{T}}: Y^* \to X^*$ 满足 $T^{\mathrm{T}}(\check{f_1}, \cdots, \check{f_m}) = (\check{e_1}, \cdots, \check{e_m})A$.

注记. 以上结论告诉我们: 若 T_pM 中取基 $\left(\dfrac{\partial}{\partial \varphi^1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial \varphi^m}\right)_p$,$T_qN$ 中取基 $\left(\dfrac{\partial}{\partial \psi^1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial \psi^n}\right)_{\varphi(p)}$. 其转置给出了 $F^*: T_qN \to T_pM$ 在相应对偶基下的矩阵表示.

例子. 若 $M \subset \mathbb{R}^m, N \subset \mathbb{R}^n$ 是开集,$F: M \to N$ 光滑,$p \in M, q = F(q)$, 则 $dF|_p$ 在 $T_p\mathbb{R}^m$ 的基 $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x^m}\right)$ 和 T_qN 的基 $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x^n}\right)$ 下的矩阵表示是 $\mathrm{Jac}(F)_p$. 在这个意义下,$dF|_p$ 和 $\mathrm{Jac}(F)_p$ 相同.

命题 4.4.14. 令 $F: M \to N, G: N \to P$ 光滑,$p \in M, p' = F(p), p'' = G(p')$, 则有 ***chain rule***

$$(G \circ F)^*_{p''} = F^*_{p'} \cdot G^*_{p''}$$
$$d(G \circ F)_p = dG_{p'} \cdot dF_p$$

证明: 对任意 $f \in \mathscr{C}_p^\infty$, 有

$$(G \circ F)^* df = d(f \circ G \circ F) = F^* d(f \circ G) = F^* G^* df$$

故 $(G \circ F)^* = F^* \cdot G^*$. 取转置得 $d(G \circ F) = dG \cdot dF$. □

4.5 流形的嵌入和浸入

我们用更几何的语言来运用反函数定理.

定理 4.5.1. 令 $F: M \to N$ 为光滑映射,$p \in M, q = F(p)$. 若 $dF|_p: T_pM \to T_qN$ 是线性空间的同构, 则存在 p 的邻域 U 和 q 的邻域 V 使 $F: U \to V$ 是微分同胚.

证明: 不妨缩小 M 和 N 使它们同胚与欧式空间的开子集, 则本定理即是反函数定理. □

定理 4.5.2. 令 $F: M \to N$ 光滑,$q \in N$. 假设 $\forall p \in F^{-1}(q)$ 有 $dF|_p: T_pM \to T_qN$ 是满射, 则 $F^{-1}(q)$ 是 M 的子流形, 且 $\dim_p F^{-1}(q) = \dim_p M - \dim_q N$.

证明: 任取 $p \in F^{-1}(q)$. 取 p 邻域 U,q 邻域 V. 通过微分同胚, 不妨假设 $U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$ 是开集,$q = 0$. 则 $\mathrm{Jac}\, F|_p$ 是满秩的 $n \times m$ 矩阵. 特别地 $m \geqslant n$. 令 $k = m - n$, 通过调整 U 标准坐标 $x^1, \cdots, x^m$ 次序, 不妨假设 $\mathrm{Jac}\, F|_p = (A_{n\times k}, B_{n\times n})$ 的后 n 列和 n 行 $B_{n\times n}$ 是可逆 n 阶矩阵. 则

$$(x^1, \cdots, x^k, F): U \to \mathbb{R}^k \times V$$

是 p 处局部微分同胚, 因为其 Jacobian 矩阵 $\begin{pmatrix} I_{k\times k} & 0 \\ A_{n\times k} & B_{n\times n} \end{pmatrix}$ 可逆, 且 $U \cap F^{-1}(q) = U \cap F^{-1}(0)$ 是 F 在 U 中零点.$x^1, \cdots, x^k$ 给出 $F^{-1}(0)$ 在 p 附近的坐标, 故 $\dim_p F^{-1}(0) = k$. □

我们接下来关注: 若光滑映射 $F: M \to N$ 是单射.$F(M)$ 何时是 N 的子流形, 若是,$F: M \to N$ 是否是微分同胚. 特别地, 若 M 是 $\mathbb{R}^m$ 开子集, 我们想知道 $F: M \to F(M)$ 是否给出 $F(M)$ 的参数化.

定义 4.5.3. 光滑映射 $F: M \to N$ 称为**光滑嵌入**若 $F(M)$ 是 N 子流形, 且 $F: M \to F(M)$ 是微分同胚.

命题 4.5.4. *令 $F: M \to N$ 是 C^∞ 嵌入, 则 $\forall p \in M, q = F(p)$, 有 $dF|_p: T_pM \to T_qM$ 是单射.*

证明: 不妨假设 M 是 N 子流形. 通过缩小 M 和 N 到 p, q 邻域, 并经过微分同胚, 不妨假设 $p = q = 0$,N 是 $\mathbb{R}^n$ 开子集,$m \leqslant n$.

$$F: x \in M \mapsto (x, \cdots, 0, \cdots, 0) \in N$$

则 $\operatorname{Jac} F$ 是单射. □

注记. 若 M 是 N 子流形,$p \in M, \iota: M \to N$ 是子集的嵌入映射 $x \in M \mapsto x \in N$. 则

$$d\iota: T_pM \to T_pN$$

是单射. 我们通常把 T_pM 和 $d\iota|_p(T_pM)$ 等同, 从而把 T_pM 看作 T_pN 的线性子空间. 特别地, 若 $N = \mathbb{R}^n$, 且若把 N 的切空间和 $\mathbb{R}^n$ 等同, 则 T_pM 是 $\mathbb{R}^n$ 线性子空间, 因此,$\mathbb{R}^n$ 子流形的切空间自然地是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间.

定理 4.5.5. *令 $F: M \to N$ 是光滑映射,$p \in M, q = F(p)$. 假设 F 在 p 处是**浸入 (immersion)**, 即 $dF|_p: T_pM \to T_qN$ 是单射. 则 F 是 p 处的局部 C^∞ 嵌入, 即存在 p 邻域 U, 使 $F: U \to N$ 是 C^∞ 嵌入.*

证明: 通过缩小 N 和 M, 不妨假设 M 和 N 分别是 $\mathbb{R}^m$,$\mathbb{R}^n$ 开子集, 且 $p = 0, q = 0$. 矩阵 $\operatorname{Jac} F|_p$ 是单射的 $n \times m$ 矩阵, 因此 $n \geqslant m$. 令 $k = n - m$, 不妨令 $\operatorname{Jac} F|_0 = \begin{pmatrix} A_{m\times m} \\ B_{k\times m} \end{pmatrix}$ 的前 m 行和 m 列 $A_{m\times m}$ 可逆. 令

$$G(x_1, \cdots, x_n) = F(x_1, \cdots, x_m) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

则 $\operatorname{Jac} G|_0 = \begin{pmatrix} A_{m\times m} & 0 \\ B_{k\times m} & I_{k\times k} \end{pmatrix}$ 可逆. 取 $0 \in \mathbb{R}^k$ 充分小邻域 Ω 使 $G(U \times \Omega) \subset N$. 有反函数定理,$G$ 是 0 处的局部微分同胚, 通过缩小 U, Ω, N, 有 $G: U \times \Omega \to V$ 是微分同胚.$G^{-1} \circ F: U \to U \times \Omega$ 把 $(x_1, \cdots, x_m)$ 送到 $(x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)$. 显然 $G \circ F^{-1}$ 是 C^∞ 嵌入. 因此 F 是 C^∞ 嵌入. □

定理 4.5.6. *令光滑映射 $F: M \to N$ 是***浸入***, 即在 M 每个点处是浸入. 若以下条件之一满足, 则 F 是 C^∞ 嵌入:*

(1) F 是单射, 且 $F(M)$ 是 N 的子流形. 且 $\forall p \in M, \dim_p M = \dim_{F(p)} F(M)$.

(2) 赋予 $F(M)$ 来自于 N 的子集拓扑, 则 $F: M \to F(M)$ 是拓扑空间的同胚.

证明: **(1)**,$F(M)$ 是 N 子流形, 则 $F(M)$ 上光滑函数来源于 N 上光滑函数 h 的限制, 因为 $h \circ F \in \mathscr{C}^\infty_M$, 故连续映射 $F: M \to F(M)$ 光滑. 只需证明对任意 $p \in M$,

$$dF_p : T_pM \to T_{F(p)}F(M)\text{是线性同构} \tag{$*$}$$

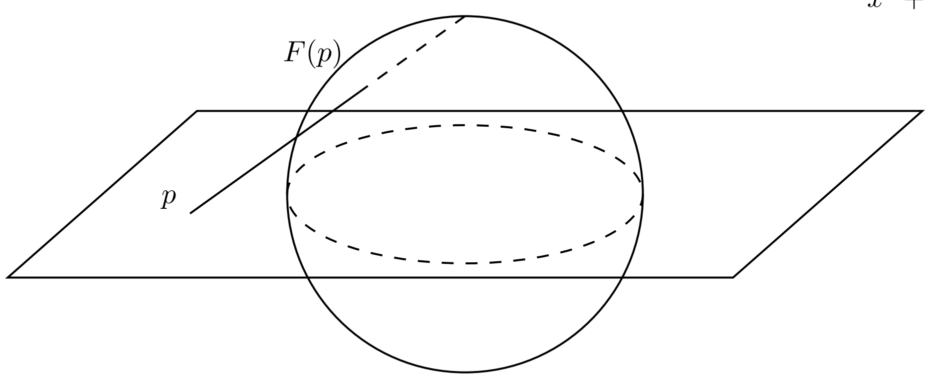
则 F 是 p 一个邻域到 $F(p)$ 在 $F(M)$ 中一个邻域的微分同胚, 从而 F 是开映射 (从而是拓扑同胚) 且 $F^{-1}: F(M) \to M$ 处处光滑. 故 F 是微分同胚. 选定 $p \in M$, 要证 $(*)$, 通过缩小 M 和 N, 不妨假设 N 是 $\mathbb{R}^n$ 开子集,$F(p) = 0$,$m = \dim_p M = \dim_{F(p)} F(M) \leqslant n$,$F(M) = N \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$,$M$ 是 $\mathbb{R}^m$ 开子集. 则 $\mathrm{Jac}\, F|_p$ 是单射且形如 $\begin{pmatrix} A_{m\times m} \\ 0_{k\times m} \end{pmatrix}$ $(k = n - m)$. 故 $A_{m\times m}$ 可逆. 故限制 $F: M \to F(M)$ 在 p 处的 Jacobian 为可逆矩阵 A, 得证.

(2), 由 (1), 只需证 $\forall p \in M$, 存在 $F(p)$ 在 N 中邻域 V 使 $F(M) \cap V$ 是 N 子流形 (从而 $F(M)$ 是 N 子流形且 $\dim_p M = \dim_p F(M)$). 令 $m = \dim_p M$. 因 F 在 p 处是浸入, 存在 p 邻域 U 使 $F: U \to N$ 是 C^∞ 嵌入. 故 $F(U)$ 是 N 子流形且 $\dim_p F(U) = m$. 因为 $F: M \to F(M)$ 是同胚, 故 $F(U)$ 是 $F(M)$ 开子集, 故存在 N 开子集 V 使 $F(U) = F(M) \cap V$. 而 $F(p) \in V$, 因此 $F(M) \cap V$ 是 N 子流形且 $\dim_p F(M) = \dim_p F(U) = m$. □

推论 4.5.7. *令 $F: M \to N$ 为光滑单射且是浸入. 若 M 是紧流形, 则 F 是 C^∞ 嵌入.*

证明: $F: M \to F(M)$ 连续且 M 紧, 因此 $F: M \to F(M)$ 是同胚. □

例子. 令 $G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. 则在 $M = Z(G)$ 上,$\mathrm{Jac}\, G = (2x, 2y, 2z)$ 处处满秩, 因此 M 是 $\mathbb{R}^3$ 的二维子流形. 定义 $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,$F(x,y) = \dfrac{(2x, 2y, x^2+y^2-1)}{x^2+y^2+1}$.



则 F 是单射,$F(\mathbb{R}^3) = M \setminus \{(0,0,1)\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的二维子流形, 且 3×2 矩阵 $\mathrm{Jac}\, F$ 在每个 (x,y) 处是单射. 因此由前一命题 $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 是 C^∞ 嵌入.$F: \mathbb{R}^2 \to M \setminus \{(0,0,1)\}$ 是微分同胚, 称为 $M \setminus \{(0,0,1)\}$ 的**球极坐标** ***(stereographic coordinate)***.

4.6 欧式空间的平移不变测度

注意若 (X,μ) 是测度空间,$f:X\to[0,+\infty]$ 可测, 则$\boldsymbol{f\cdot\mu}$ 或$\boldsymbol{fd\mu}$ 是测度, 若对任意可测 $A\subset X$ 有

$$(f\cdot\mu)(A)=\int_A fd\mu$$

可数可加性由单调收敛定理得到: 若 $A_1,A_2,\cdots$ 为两两不交可测集,$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, 则

$$\begin{aligned}\int_A fd\mu=\int_X f\cdot\chi_A d\mu=\int_X f\cdot\sum_n\chi_{A_n}d\mu\\ =\sum_n\int_X f\cdot\chi_{A_n}d\mu=\sum_n\int_{A_n}fd\mu\end{aligned}$$

等价地, 对任意可测函数 $g:X\to[0,+\infty)$ 有 $\int g\cdot(fd\mu)=\int fgd\mu$. (等价性用简单函数递增逼近 g 得到)

引理 4.6.1. 令 μ 为 X 上 σ-有限测度,$f,g:X\to[0,+\infty)$ 可测, 且 $fd\mu=gd\mu$. 则 $\nu=fd\mu$ 是 σ-有限的, 且 $f=g\quad(\mu-a.e.)$.

证明: 令 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n$, 其中 $X_1\subset X_2\subset\cdots$ 可测且 $\mu(X_n)<+\infty$. 对任意正整数 k, 令

$$X_{n,k}=\{x\in X_n:f(x)\leqslant k\}$$

则 $\nu(X_{n,k})<+\infty$, 故 ν 是 σ-有限的. 令

$$X_{n,k}^+=\{x\in X_{n,k}:f(x)\geqslant g(x)\}$$

则 $\int_{X_{n,k}^+}(f-g)d\mu=\nu(X_{n,k}^+)-\nu(X_{n,k}^+)=0$. 故在 $X_{n,k}^+$ 上 $f=g\quad(\mu-\text{a.e.})$. 类似地, 在 $X_{n,k}^-=X_{n,k}\setminus X_{n,k}^+$ 上也有 $f=g\quad(\mu-\text{a.e.})$. □

定义 4.6.2. 若 μ,ν 是 X 上测度, 记$\boldsymbol{\nu\ll\mu}$ 若对于任意可测集 $A\subset X$ 有 $\mu(A)=0\implies\nu(A)=0$.

定理 4.6.3 (Radon-Nikodym)**.** 若 μ,ν 是 X 上 σ-有限测度,$\nu\ll\mu$, 则存在可测函数 $f:X\to[0,+\infty)$ 使 $\nu=f\cdot\mu$. 其中 f 称为 ν 关于 μ 的 ***Radon-Nikodym* 导数**, 记为$\boldsymbol{\frac{d\nu}{d\mu}}$. 且若 $\nu\leqslant\mu$ 时可取 $f:X\to[0,1]$.

证明: **Case 1:** 假设 $\nu\leqslant\mu$, 即 $\nu(A)\leqslant\mu(A)$. 则由简单函数逼近知 $\forall g\in L^+(X)$ 有 $\int_X gd\nu\leqslant\int_X gd\mu$. 因此

$$\Lambda:L^1(X,\mu)\to\mathbb{C},g\mapsto\int_X gd\nu$$

是有界线性映射,$\|\Lambda\|\leqslant1$. 由于 μ 是 σ-有限的, 存在 $f\in L^\infty(X,\mu),\|f\|\leqslant1$ 使得 $\forall g\in L^1(X)$ 有

$$\int_X gd\nu=\int_X fgd\mu$$

现令 $g \geqslant 0$, 则 $\int_X g d\nu \geqslant 0$. 故

$$\int_X f g d\mu = \int_X (\operatorname{Re} f) \cdot g d\mu$$

故不妨假设 f 取实值. 现在考虑 $\int_X f g d\mu = \int_X f^+ g d\mu - \int_X f^- g d\mu$. 若 $\int_X f^- g d\mu > 0$, 令 $\Delta = \{x \in X : f^-(x) > 0\}$, 则 $\Lambda(g \cdot \chi_\Delta) = -\int_X f^- g d\mu < 0$ 矛盾! 故 $\forall g \in L^1(X, [0, \infty))$ 有

$$\Lambda(g) = \int_X f g d\mu = \int_X f^+ g d\mu$$

通过把 f 换成 f^+, 则可不妨假设 $f \geqslant 0$.$\forall A \subset X$ 为可测集, 记 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 其中 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ 可测,$\mu(A_n) < +\infty$, 则 $\nu(A_n) = \Lambda(\chi_{A_n}) = \int_{A_n} f d\mu$. 取 $n \to \infty$ 得 $\nu(A) = \int_A f d\mu$.

Case 2: 一般情况, 因 $\omega = \mu + \nu$ 是 σ-有限的, 由 Case 1, 存在可测 $\alpha, \beta : X \to [0, +\infty)$ 使 $\mu = \alpha \cdot \omega, \nu = \beta \cdot \omega$, 我们证明 $\Delta = \{x \in X : \alpha(x) = 0\}$ 是 ω-零测的:

$$\mu(\Delta) = \int_X \chi_\Delta \cdot \alpha\omega = 0$$

又由于 $\nu \ll \mu$, 因此 $\nu(\Delta) = 0$, 进而 $\omega(\Delta) = \mu(\Delta) + \nu(\Delta) = 0$. 令 $f : X \to [0, +\infty)$ 为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} & (\text{若} x \notin \Delta) \\ 0 & (\text{若} x \in \Delta) \end{cases}$$

则 $\forall g : X \to [0, +\infty)$ 可测有

$$\begin{aligned} \int_X g d\nu = \int_X g \cdot \beta d\omega &= \int_{X \setminus \Delta} g \cdot \beta d\omega \\ &= \int_{X \setminus \Delta} g \cdot f \cdot \alpha d\omega = \int_{X \setminus \Delta} g \cdot f d\mu \\ &= \int_X g \cdot f d\mu \end{aligned}$$

□

定义 4.6.4. 令 $\Phi : X \to Y$ 为测度空间之间的可测映射,μ 是 X 上的测度. 对任意可测集 $B \subset Y$ 定义

$$\mu_* \Phi(B) = \mu(\Phi^{-1}(B))$$

则 $\mu_* \Phi$ 是 Y 上测度, 称为 μ 在 Φ 下的**推出 (pushforward)**.

注记. 由单调递增简单函数逼近, 可知对任意 $f \in L^+(Y)$ 有 $\int_Y f d\Phi_* \mu = \int_X f \circ \Phi d\mu$.

例子. *若 $\Phi : X \to Y$ 是 LCH 空间之间的同胚, 若 μ 是 X 上的 Radon 测度, 则 $\Phi_* \mu$ 是 Y 上的 Radon 测度.*

定义 4.6.5. $\mathbb{R}^N$ 上的 Borel 测度 μ 称为**平移不变**, 若对任意 $y \in \mathbb{R}^N$, 平移映射 $\tau_y : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, x \mapsto x + y$ 满足 $\tau_{y,*} \mu = \mu$.

定理 4.6.6. *令 μ 是 $\mathbb{R}^N$ 的 Radon 测度 (等价地, 在紧集上有限的 Borel 测度), 则以下等价:*

(1) μ 是平移不变的.

(2) 存在 $c \geqslant 0$ 使 $\mu = cm,m$ 是 Lebesgue 测度.

证明: **(2) $\Longrightarrow$ (1) :** 若 $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$, 则对任意 $y \in \mathbb{R}^N$, 由 Riemann 积分平移不变性可知 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f \circ \tau_y dm = \int_{\mathbb{R}^N} f dm$. 故

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\tau_{y,*}m = \int_{\mathbb{R}} f dm$$

由于 Radon 测度由 C_c 中元素的积分决定, 故 $\tau_{y,*}m = m$. 故 $\mu = cm$ 平移不变.

(1) $\Longrightarrow$ (2) : 令 $\omega = \mu + m$, 则 ω 也是平移不变的. 由 Radon-Nikodym 定理, 存在 Borel 可测 $\alpha : \mathbb{R}^N \to [0,1]$ 使 $\alpha = \dfrac{d\mu}{d\omega}$. 则 $\forall f \in L^+(\mathbb{R}^N)$ 有

$$\int f d\mu = \int f\alpha d\omega$$

由于 μ 和 ω 平移不变,$\forall y \in \mathbb{R}^N$,

$$\int f\alpha d\omega = \int f d\mu = \int f \circ \tau_y d\mu = \int (f \circ \tau_y) \cdot \alpha d\omega = \int f \cdot (\alpha \circ \tau_{-y}) \, d\omega$$

故

$$\int f(x)\alpha(x)dx = \int f(x)\alpha(x+y)dx \tag{a}$$

特别地, 对任意紧集 $K \subset \mathbb{R}^N$ 使 $m(K) = 1$, 取 $f = \chi_K$ 得 $\displaystyle\int_K \alpha(x)dx = \int_K \alpha(x+y)dx \; (\forall y \in \mathbb{R}^N)$, 我们改写成

$$\int_K \alpha(y)dy = \int_K \alpha(x+y)dy \quad \left(\forall x \in \mathbb{R}^N\right) \tag{b}$$

因此由 (a) 得

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\alpha(x)dx &= \int_K \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\alpha(x)dxdy \\
&= \int_K \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\alpha(x+y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^N} \int_K f(x)\alpha(x+y)dydx \\
&\overset{(b)}{=} \int_{\mathbb{R}^N} \int_K f(x)\alpha(y)dydx = \int_{\mathbb{R}^N} f dm \cdot \int_K \alpha dm
\end{aligned}$$

令 $a = \displaystyle\int_K \alpha dm \leqslant 1$, 则 $\displaystyle\int_X f \cdot \alpha dm = \int_x f \cdot a dm$. 故可把 α 换成 $a \in [0,1]$, 故 $\mu = a \cdot \omega = a \cdot (\mu + m)$, 即 $(1-a)\mu = am$. 若 $a = 1$ 则 $m = 0$, 不可能. 因此 $0 \leqslant a < 1, \mu = \dfrac{a}{1-a} m$. □

令 $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ 是可逆线性映射, 则显然 $T_* m$ 是平移不变的. 我们接下来来确定 $\dfrac{dT_* m}{dm}$.

例子. *若 T 是交换 $\mathbb{R}^N$ 两行, 则 $T_* m = m$.*

证明: 我们以 T 交换前两行为例.$\forall f \in C_c(\mathbb{R}^N)$,

$$\int f \circ T \left(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_N\right) dm = \int f \left(x_2, x_1, x_3, \cdots, x_N\right) dm = \int f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_N) dm$$

□

例子. 若 T 把某一行乘以 $a \neq 0$, 则 $T_* m = |a|^{-1} m$.

证明: 不妨令 T 把第一行乘以 a, 则 $\forall f \in C_c(\mathbb{R}^N)$, 有单变量的积分换变量公式,

$$\int_{\mathbb{R}} f\left(a x_1, x_2, \cdots, x_N\right) d x_1=|a|^{-1} \int_{\mathbb{R}} f\left(x_1, x_2, \cdots, x_N\right) d x_1$$

对 $x_2, \cdots, x_N$ 积分得证. □

例子. 若 $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ a x_1+b x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$, 则 $T_* m=m$.

证明: 由累次积分, 可化为证明 $\forall f \in C_c(\mathbb{R}^2)$ 则 $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d m=\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, x+y) d m$. 由 Fubini 定理,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, x+y) d m & =\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x+y) d y d x \\ & \stackrel{u=x+y}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, u) d u d x=\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d m \end{aligned}$$

□

定理 4.6.7. 令 $T: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ 为可逆线性映射, 则 $T_* m=|\det(T)|^{-1}$. 即 $\forall f \in L^{+}(\mathbb{R}^N)$, 有 $\int_{\mathbb{R}^N}(f \circ T) d m=|\det(T)|^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} f d m$.

证明: 把 T 写成初等行变换的复合,$T=S_n \circ \cdots \circ S_1$. 若 $\left(S_{n-1} \circ \cdots \circ S_1\right)_* m=\left|\det\left(S_{n-1} \cdots S_1\right)\right|^{-1} m$ 成立, 由前几例,

$$\begin{aligned} T_* m & =S_{n, *} \cdot\left(S_{n-1} \circ \cdots \circ S_1\right)_* m \\ & =\left|\det\left(S_{n-1} \cdots S_1\right)\right|^{-1} \cdot S_{n, *} m=\left|\det\left(S_{n-1} \cdots S_1\right)\right|^{-1} \cdot\left|\det S_n\right|^{-1} m \\ & =|\det T|^{-1} m \end{aligned}$$

故由归纳法知命题得证. □

推论 4.6.8. 若 $T: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ 为线性变换, 则任意 *Lebesgue* 可测集 $A \subset \mathbb{R}^N$ 有 $m(T(A))=|\det T| m(A)$.

证明: 若 T 可逆, 则由

$$m(T(A))=\int_{\mathbb{R}^N} \chi_A \circ T^{-1} d m=\int_{\mathbb{R}^N} \chi_A d\left(T_*^{-1} m\right)=|\det T| \int_{\mathbb{R}^N} \chi_A$$

得证.

若 T 不可逆, 取可逆线性 $S: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ 使 $S \circ T(\mathbb{R}^N) \subset \mathbb{R}^{N-1} \times\{0\}$. 易知 $m(\mathbb{R}^{N-1} \times\{0\})=0$, 则

$$m(T(A))=m(S \circ T(A)) \leqslant m(\mathbb{R}^{N-1} \times\{0\})=0$$

□

4.7 Lebesgue 测度的坐标变换公式

定理 4.7.1 (主定理). 令 $\Phi:\Omega\to\Gamma$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中开集的 C^1-同胚. 令 m_Ω, m_Γ 分别为 Ω,Γ 上的 *Lebesgue* 测度. 记 $J(\Phi)=\det(\operatorname{Jac}\Phi)$, 则 $\Phi_*^{-1}m_\Gamma=|J(\Phi)|m_\Omega$. 等价地,$\forall f\in L^+(\Omega,m)$, 有

$$\int_\Gamma f\circ\Phi^{-1}dm=\int_\Omega f\cdot|J(\Phi)|dm$$

等价地,$\forall g\in L^+(\Gamma,m)$, 有

$$\int_\Gamma gdm=\int_\Omega(g\circ\Phi)\cdot|J(\Phi)|dm$$

引理 4.7.2. 在主定理中, 只需证明 $g\in C_c(\Gamma), g\geqslant 0$(等价地,$f\in C_c(\Omega), f\geqslant 0$) 的情形.

证明: $\Phi_*^{-1}m_\Gamma$ 和 $|J(\Phi)|m_\Omega$ 都是在第二可数空间 Ω 上的 Borel-测度且在紧集上取值 $<+\infty$, 故都是 Radon 测度, 因此其取值由其在 $C_c(\Omega)$ 上的积分决定. □

引理 4.7.3. $\forall\Omega,\Gamma$ 以及 C^1 同胚 $\Phi:\Omega\to\Gamma$ 和 $g\in C_c(\Gamma), g\geqslant 0$ 有

$$\int_\Gamma gdm\leqslant\int_\Omega(g\circ\Phi)|J(\Phi)|dm \qquad (*)$$

引理 *4.7.3* $\Longrightarrow$ 主定理的证明. 假设 "$\leqslant$" 永远成立. 则把 $(*)$ 中 Γ,Ω,Φ,g 换成 $\Omega,\Gamma,\Phi^{-1},g\circ\Phi$ 也有 "$\leqslant$" 成立. 故

$$\int_\Omega(g\circ\Phi)|J(\Phi)|dm\leqslant\int_\Omega\left(g\circ\Phi\circ\Phi^{-1}\right)(y)\cdot\left|J(\Phi)_{\Phi^{-1}(y)}\cdot J\left(\Phi^{-1}\right)_y\right|dm(y)$$

故 $\displaystyle\int_\Gamma gdm\leqslant\int\Omega\left(g\circ\Phi\right)|J(\Phi)|dm\leqslant\int_\Gamma gdm.$ □

引理 4.7.4. $\forall g\in C_c(\Gamma), g\geqslant 0$, 若 $f=g\circ\Phi$ 的支集 $\operatorname{supp}(f)$ 满足存在 Ω 中开立方体 Q 使 $\operatorname{supp}(f)\subset Q\subset\overline{Q}\subset\Omega$, 则

$$\int_\Gamma gdm\leqslant\int f|\operatorname{Jac}(\Phi)|dm$$

引理 *4.7.4* $\Longrightarrow$ 引理 *4.7.3* 的证明. 令 $f=g\circ\Phi$. 取 $K=\operatorname{supp}(f)$ 在 Ω 中开覆盖 $Q_1,\cdots,Q_N$ 使 $\overline{Q_i}\subset\Omega$. 取 K 在此开覆盖下的单位分解 $h_1,\cdots,h_N$, 则 $f=f_1+\cdots+f_N$, 其中 $f_N=h_i\cdot f$. 令 $g_i=f_i\circ\Phi^{-1}$. 由引理假设 $\displaystyle\int_\Gamma g_i\leqslant\int f_i|\operatorname{Jac}(\Phi)|dm$, 对 i 求和得

$$\int_\Gamma g\leqslant\int f|\operatorname{Jac}(\Phi)|dm$$

引理 4.7.3 得证. □

为了证明引理 4.7.4, 我们要将 Q 分成若干小立方体的不交并, 这里的**立方体**形如 $I_1\times\cdots I_n$, 其中 $I_1,\cdots,I_N$ 是长度有限且相同的 (不一定开或闭) 的区间.

约定: 接下来, 线性空间 $\mathbb{R}^n$ 中取得范数为

$$\|x\|=\sup_i|x_i|(\text{若}x=(x_1,\cdots,x_n))$$

其 "单位开球" 为 $\{x\in\mathbb{R}^n:|x_1|,\cdots,|x_n|<1\}$, 它是开立方体. 若 $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是线性的,$\|A\|$ 指 A 在 $\mathbb{R}^n$ 的这一范数下的算子范数.

注记. 若 V 是线性空间,$C \subset V, 0 \in C$ 满足

- C 是凸的.
- C 是 balanced 的, 即 $C = \lambda C$, 若 $|\lambda| = 1$.
- C 是 absorbing 的, 即 $\forall x \in V, \exists t \geqslant 0$ 使 $x \in tC$.

则

$$\|x\| = \inf_{t \geqslant 0}\{t : x \in tC\} = \inf_{t > 0}\{t : t^{-1}x \in C\}$$

是半范数, 且 $\{x : \|x\| < 1\} \subset C \subset \{x : \|x\| \leqslant 1\}$. 若 $\forall x \neq 0, \exists t > 0$ 使 $x \notin tC$, 则 $\|\cdot\|$ 是范数.$\|\cdot\|$ 称为 C 的 **Minkowski 泛函**. 上一例中,$\|\cdot\|$ 是立方体 $\{x \in \mathbb{R}^n : \sup_i |x_i| < 1\}$ 的 Minkowski 泛函.

引理 4.7.5. 若 Q 是 Ω 内立方体, 且 $\overline{Q} \subset \Omega$, 则

$$m(\Phi(Q)) \leqslant \left(\sup_{x \in Q} \|\mathrm{Jac}(\Phi)_x\|\right)^n m(Q)$$

证明: 令 $M = \sup_{x \in \overline{Q}} \|\operatorname{Jac}(\Phi)_x\|$. 由 $\overline{Q} \subset \Omega$ 知 $M < +\infty$.
Case 1: 假设 Q 是开的, 令其边长为 $2a$, 中心为 p, 即 $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - p\| < a\}$. 则 $\forall x \in Q$, 对 $F(t) = \Phi(p + t(x - p))$ 用微积分基本定理

$$\|\Phi(x) - \Phi(p)\| = \left\|\int_0^1 \mathrm{Jac}(\Phi)_{p+t(x-p)} \cdot (x-p)dt\right\| \leqslant M \cdot \|x - p\| < Ma$$

故 $\Phi(Q)$ 被包含在以 $\Phi(p)$ 为中心, 边长 $2Ma$ 的开立方体中. 故 $m(Q) = 2^n a^n, m(\Phi(Q)) \leqslant 2^n M^n a^n$.
Case 2: 一般情况, 由于 $\overline{Q} \subset \Omega, \forall \varepsilon$, 存在开立方体 Q' 满足 $Q \subset Q' \subset \overline{Q'} \subset \Omega$ 且 $m(Q') \leqslant m(Q) + \varepsilon$, 则

$$m(\Phi(Q)) \leqslant m(\Phi(Q')) \leqslant M^n m(Q') + M^n \varepsilon$$

由 ε 任意性和 $M < +\infty$ 得证. □

引理 4.7.4 的证明. 由于 $\mathrm{Jac}(\Phi)$ 在 $\overline{Q}$ 上一致连续, 对于 $x, y \in \overline{Q}$ 有 $\lim_{\|x-y\| \to 0} \|\mathrm{Jac}(\Phi)_y - \mathrm{Jac}(\Phi)_x\| = 0$, 故

$$\left\|\left(\mathrm{Jac}\,\Phi_x\right)^{-1}\left(\mathrm{Jac}\,\Phi_y\right) - 1\right\| \leqslant \sup_{z \in \overline{Q}} \left\|\mathrm{Jac}\left(\Phi_x\right)^{-1}\right\| \cdot \|\operatorname{Jac}(\Phi)_y - \operatorname{Jac}(\Phi)_x\| \to 0$$

因此 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in \overline{Q}$, 若 $|x - y| < \delta$, 则

$$\left\|\mathrm{Jac}\left(T_x^{-1}\Phi\right)_y\right\| = \left\|T_x^{-1}\,\mathrm{Jac}\left(\Phi_y\right)\right\| \leqslant (1+\varepsilon)^{\frac{1}{n}}$$

故若 $B \subset \overline{Q}$ 是边长 $\leqslant 2\delta$ 的立方体, 中心为 x, 则应用引理 4.7.5 得

$$m(T_x^{-1}\Phi(B)) \leqslant (1+\varepsilon)m(B)$$

由 Lebesgue 测度在线性映射下的变换公式,

$$m(\Phi(B)) = |J(\Phi)_x| \cdot m\left(T_x^{-1}\Phi(B)\right) \leqslant (1+\varepsilon)\,|J(\Phi)_x|\,m(B)$$

将 $\overline{Q}$ 分成若干立方体的不交并 $\overline{Q} = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_n$, 每个 B_i 的边长 $\leqslant \delta$, 且由一致连续性, $\sup\limits_{x,y\in B_i} |f(x)|J(\Phi)_x| - f(y)|J(\Phi)_y|| \leqslant \varepsilon$. 令 x_i 为 B_i 中心, 令 $a_i = \sup\limits_{x\in B_i} f(x) = \sup\limits_{y\in\Phi(B_i)} g(y)$, 则 $g \leqslant \sum\limits_{i=1}^{N} a_i \chi_{\Phi(B_i)}$,

$$\begin{aligned}\int_\Gamma g dm &\leqslant \sum_i a_i m\left(\Phi\left(B_i\right)\right) \leqslant (1+\varepsilon) \sum_i a_i \left|J(\Phi)_{x_i}\right| m\left(B_i\right) \\ &= (1+\varepsilon) \int_{\overline{Q}} \left(\sum_i a_i \chi_{B_i} \cdot J(\Phi)_{x_i}\right) dm\end{aligned}$$

若 $x \in Q_i$, 由已证式子 $|f(x)J(\Phi)_x - a_i J(\Phi)_{x_i}| \leqslant \varepsilon$, 故

$$\left\| f - \sum_i a_i \chi_{B_i} J(\Phi)_{x_i} \right\|_{l^\infty} (\overline{Q}) \leqslant \varepsilon$$

进而

$$\begin{aligned}\int_\Gamma g dm &\leqslant (1+\varepsilon)\left(m(\overline{Q})\varepsilon + \int_{\overline{Q}} f|J(\Phi)|dm\right) \\ &= (1+\varepsilon)\left(m(\overline{Q})\varepsilon + \int_\Omega f|J(\Phi)|dm\right)\end{aligned}$$

由 $\varepsilon > 0$ 任意性得 $\int_\Gamma g dm \leqslant \int_\Omega f|J(\Phi)|dm$.

综上, 主定理证明完成. □

4.8 带边微分流形

定义 4.8.1. 若 M 是微分流形,$E \subset M$. 定义:

$$\mathscr{C}_E^\infty = \{函数 f: U \to \mathbb{R}, U 是 E 开子集, \forall p \in U, 存在 p 在 M 内邻域 V 和 g \in C^\infty(V,) 使 f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}\}$$

$$C^\infty(U, \mathbb{R}) = \mathscr{C}_E^\infty(U) = \{f: U \to \mathbb{R}, f \in \mathscr{C}_M^\infty|_E\}$$

$C^\infty(E, \mathbb{R}) = \mathscr{C}_E^\infty(E)$ 中的函数称为 E 上的**光滑函数**,$\mathscr{C}_E^\infty$ 称为 E 的**光滑函数层**. 若 F 是 C^∞ 流形 N 的子集, 我们说连续映射 $\Phi: E \to F$ 是**光滑**的, 若 $\Phi^*\mathscr{C}_F^\infty \subset \mathscr{C}_E^\infty$, 即

$$\forall f \in \mathscr{C}_F^\infty, \Phi^* f = f \circ \Phi \in \mathscr{C}_E^\infty$$

若 Φ 是双射且 $\Phi^{-1}: F \to E$ 光滑, 我们说 Φ 是**微分同胚**.

注记. 显然光滑映射的复合光滑. 若 E 有开覆盖 $E = \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$, 则

$$\Phi: E \to F 光滑 \Longleftrightarrow \forall \alpha, \Phi|_{U_\alpha} \to F 光滑$$

注记. 若 $\Phi: E \to F$ 是映射, 则 $\Phi: E \to F$ 光滑 $\Longleftrightarrow \Phi: E \to N$ 光滑.

注记. $\Phi: E \to \mathbb{R}^n$ 光滑 $\Longleftrightarrow \Phi$ 每个分量 $\Phi^i: E \to \mathbb{R}$ 属于 $C^\infty(E, \mathbb{R})$.

证明: “$\Longrightarrow$” :$x^i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 属于 $\mathscr{C}^\infty_{\mathbb{R}^n}$. 故 $\Phi^i=x^i\circ\Phi\in\mathscr{C}^\infty_E$.
“$\Longleftarrow$” : 任意开集 $W\subset\mathbb{R}^n,\forall f\in C^\infty(W,\mathbb{R})$, 要证 $f\circ\Phi\in\mathscr{C}^\infty_E$. 对任意 $p\in E$ 使得 $\Phi(p)\in W$, 由于 $\Phi^1,\cdots,\Phi^n\in\mathscr{C}^\infty_E$, 存在 p 在 M 内邻域 V 和 $\Psi^1,\cdots,\Psi^n\in C^\infty(V,\mathbb{R})$ 使在 $\Phi^{-1}(W)\cap V$ 上有 $\Phi^i=\Psi^i$, 故 $f\circ\Phi=f\circ(\Psi^1,\cdots,\Psi^n)$. 而 $f\circ(\Psi^1,\cdots,\Psi^n)\in C^\infty(V,\mathbb{R})$, 这证明了 $f\circ\Phi\in\mathscr{C}^\infty_E$. □

定义 4.8.2.

$$\mathbb{H}^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n:x_n\geqslant 0\}$$

$$\operatorname{Int}\mathbb{H}^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n:x_n>0\},\partial\mathbb{H}^n=\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$$

$\operatorname{Int}\mathbb{H}^n$ 和 $\partial\mathbb{H}^n$ 分别称为 $\mathbb{H}^n$(相对于 $\mathbb{R}^n$ 的) **内部和边界**.

定义 4.8.3. 令 M 为 Hausdorff 空间. 若 M 有开覆盖 $M=\bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ 以及开嵌入 $\varphi_\alpha:U\to\mathbb{R}^n$ 或 $\varphi_\alpha:U\to\mathbb{H}^n$ 满足 $\forall\alpha,\beta$, 有 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 和 (U_β,φ_β) 是$\boldsymbol{C^\infty}$**-相容**的. 即

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

是微分同胚, 则称 M 为**带边微分流形或$\boldsymbol{\partial}$-(微分) 流形**. 若 $V\subset M$ 是开集,$\psi:V\to\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{H}^n$ 是开嵌入且与每个 $(U_\alpha,\varphi)C^\infty$ 相容, 则称 (V,ψ) 是一个**坐标卡**. $\mathscr{C}^\infty_M$ 的定义与普通 C^∞ 流形相同, 即

$$f\in\mathscr{C}^\infty_M\Longleftrightarrow\forall\alpha\, f\circ\varphi_\alpha^{-1}\in\mathscr{C}^\infty_{\varphi_\alpha(U)}$$

$\mathscr{C}^\infty_M$ 称为 M 的**光滑函数层或光滑结构**.

注记. $\mathbb{R}^n$ 微分同胚于开单位球, 通过映射 $x\in\mathbb{R}^n\mapsto\dfrac{1}{1+\|x\|}x$, 故我们总可以假设坐标卡形如 $\varphi:U\to\mathbb{H}^n$.

定义 4.8.4. 若 Ω 是 $\mathbb{H}^n$ 开子集,$\Phi:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 光滑,$p\in\partial\Omega:=\Omega\cap\partial\mathbb{H}^n$. 我们能用单侧导数定义 $\partial_n\Phi|_p$, 且若取 p 在 $\mathbb{R}^n$ 内邻域 V, 取 $\widetilde{\Phi}:V\to\mathbb{R}^n$ 光滑使 $\widetilde{\Phi}|_{V\cap\Omega}=\Phi|_{V\cap\Omega}$, 则 $\partial_n\widetilde{\Phi}|_p=\partial_n\Phi|_p$. 因此我们能用 Φ 在 p 附近一个光滑延拓来刻画 $\partial_n\Phi|_p$, 从而刻画 $\operatorname{Jac}\Phi|_p$.

引理 4.8.5. *若 M 是 ∂-流形, 坐标卡 $(U,\varphi),(V,\psi)$ 包含 $p\in M$. 则 $\varphi(p)$ 是边界点 $\Longleftrightarrow$ $\psi(p)$ 是边界点.*

证明: 把 U,V 换成 $U\cap V$, 不妨假设 $U=V$. 则 $\varphi,\psi:U\to\mathbb{H}^n$. 令 $W_1=\varphi(U),W_2=\psi(U),F=\psi\circ\varphi^{-1}$. 则要证 $F:W_1\to W_2$ 给出了 W_1 边界点和 W_2 边界点之间的双射.

令 $x\in W_1,y=F(x)$. 我们证 $x\in\operatorname{Int}\mathbb{H}^n\Longleftrightarrow y\in\operatorname{Int}\mathbb{H}^n$. 假设 $x\in\operatorname{Int}\mathbb{H}^n$. 因为 F 是 C^∞-同胚,$G=F^{-1}$ 是 C^∞-同胚. 故 $1=\operatorname{Jac}(G)_y\cdot\operatorname{Jac}(F)_x$,$\operatorname{Jac}(F)_x:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是单射, 从而是双射. 由反函数定理,y 是 W_2 在 $\mathbb{R}^n$ 中的内点, 故 $y\notin\partial\mathbb{H}^n$. “$\Longleftarrow$” 得证, 另一边类似. □

定义 4.8.6. 若 M 是 ∂-流形, 我们说 $p\in M$ 是**边界点**若有一个包含 p 的坐标卡 (U,φ), 使 $\varphi(p)$ 是边界点. 所有 M 的边界点构成集合记为$\boldsymbol{\partial M}$.

命题 4.8.7. *令 $\mathfrak{U}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha):\alpha\in\mathcal{A}\}$ 为 n 维 ∂-流形 M 的图册. 则 ∂M 是一个以 $\mathfrak{U}|_{\partial M}=\{(U_\alpha\cap\partial M,\varphi_\alpha|_{U_\alpha\cap\partial M}):\alpha\in\mathcal{A}\}$ 为图册的 (不带边)$n-1$ 维微分流形.*

证明: 留给思考. 注意证明若 Ω,Γ 是 $\mathbb{H}^n$ 开子集,$F:\Omega\to\Gamma$ 是 C^∞-同胚, 则 $F:\partial\Omega\to\partial\Gamma$ 是 C^∞-同胚, 这里 $\partial\Omega=\Omega\cap\partial\mathbb{H}^n,\partial\Gamma=\Gamma\cap\partial\mathbb{H}^n$. □

定义 4.8.8. ∂-流形之间的映射 $\Phi:M\to N$ 称为**光滑**若 Φ 连续, 且 $\Phi^*\mathscr{C}_N^\infty\subset\mathscr{C}_M^\infty$. 若 Φ 是双射且 Φ^{-1} 光滑, 则称 Φ 是**微分同胚**.

类似无边情况, 映射 $\Phi:M\to N$ 光滑性可以对每个 $\psi\circ\Phi\circ\varphi^{-1}$ 验证, 若 φ,ψ 分别是 M,N 的坐标卡.

若 $p\in M,\mathscr{C}_{M,p}^\infty=\{f\in\mathscr{C}_M^p,f:U\to\mathbb{R},U\text{是}p\text{邻域}\}/\sim$. 这里 $f\sim g$ 若 f 和 g 在一个更小的 p 的邻域上相等. 记 $df|_p=0$ 或 $\mathrm{Jac}(f\circ\varphi^{-1})|_{\varphi(p)}=0$, 若 φ 是任一定义在 p 附近的坐标.

$$T_p^*M=\mathscr{C}_{M,p}^\infty/\{f\in\mathscr{C}_{M,p}^\infty,df|_p=0\}$$

$T_pM=(T_p^*M)^*$. 各概念和无边情况相等.

定义 4.8.9. 令 N 为 (不带边)C^∞ 流形.N 的子集 M 称为 N 的**∂-子流形**, 若 $\forall p$, 存在 N 的包含 p 的坐标卡 $(V,\psi),\psi=(\psi^1,\cdots,\psi^n):V\to\mathbb{R}^n$ 以及 $0\leqslant d\leqslant n,k=n-d$, 使

$$\begin{aligned}M\cap V&=\{x\in V:\psi^1(x)=\cdots=\psi^k(x)=0,\psi^n(x)\geqslant 0\}\\&=Z(\psi^1,\cdots,\psi^k)\cap\psi^{-1}(\mathbb{H}^n)=\psi^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^k}\}\times\mathbb{H}^d)\end{aligned}$$

定义 4.8.10. 若 M 是 ∂-流形,N 是不带边流形.C^∞ 映射 $F:M\to N$ 称为**(∂-流形的)C^∞ 嵌入**, 若 $F(M)$ 是 ∂-子流形, 且 $F:M\to F(M)$ 是 C^∞-同胚.

命题 4.8.11. *令 $F:M\to N$ 光滑,M 是 ∂-流形,N 是微分流形. 假设 F 在 p 处是浸入, 即 $dF|_p:T_pM\to T_{F(p)}N$ 是单射. 则存在 p 邻域 U 使 $F|_U:U\to N$ 是 C^∞-开嵌入.*

证明: 不妨假设 M 是 $\mathbb{H}^d$ 开子集,$p\in\partial\mathbb{H}^d$.N 是 $\mathbb{R}^n$ 开子集. 通过缩小 M, 能找到 p 在 $\mathbb{R}^d$ 内邻域 U 使 $M=U\cap\mathbb{H}^d$, 且 F 能扩张至 C^∞ 的 $F:U\to N$. 由 $\mathrm{Jac}(F)|_p$ 是单射, 可缩小 U 使 $F:U\to N$ 是 C^∞-嵌入. 故能缩小 N 使存在 C^∞ 开嵌入 $G:N\to\mathbb{R}^n$ 使 $G\circ F:U\to\mathbb{R}^n$ 的前 $n-d$ 个分量为 0. 记后 d 个分量为 $\Phi=(\varphi^1,\cdots,\varphi^d):U\to\mathbb{R}^d$.$\mathrm{Jac}\,\varphi|_p$ 单射, 故双射. 由反函数定理, 通过缩小 U 使 Φ 是 C^∞-开嵌入. 令 $V=\Phi(U)$, 令

$$\Psi:\mathbb{R}^{n-d}\times V\to\mathbb{R}^n,(y_1,\cdots y_n)\mapsto(y_1,\cdots,y_{n-d},\Phi^{-1}(y_1,\cdots,y_d))$$

则 $\Psi\circ G\circ F:U\to\mathbb{R}^n,(x_1,\cdots,x_d)\mapsto(0,\cdots,0,x_1,\cdots,x_d)$ 是 C^∞-嵌入. □

命题 4.8.12. *令 M 为 ∂-流形,N 为不带边流形,$F:M\to N$ 是 C^∞ 的浸入且是单射.*

(1) *若 $F(M)$ 是 N 的 ∂-子流形且 $\forall p\in M$ 有 $\dim_p M=\dim_p F(M)$. 则 F 是 ∂-子流形的 C^∞ 嵌入.*

(2) *若 $F:M\to F(M)$ 是同胚,$F(M)$ 赋予子集拓扑, 则 F 是 ∂-子流形的 C^∞ 嵌入.*

证明和不带边情形类似.

命题 4.8.13. 令 N 为 n 维的 C^∞-流形,$0 \leqslant k \leqslant n-1, F=(f^1,\cdots f^k,f^{k+1}):N\to\mathbb{R}^{k+1}$ 光滑. 令

$$M=\{x\in N: f^1(x)=\cdots=f^k(x)=0, f^{k+1}(x)\geqslant 0\}$$

假设 F 在任意 $p\in M$ 处是**淹没 (submersion)**. 即 $dF|_p: T_pN\to T_{F(p)}\mathbb{R}^{k+1}\cong\mathbb{R}^{k+1}$ 是满射. 则 M 是 N 的 $d=n-k$ 维 ∂-流形, 且 $\partial M=\{x\in M: f^{k+1}(x)=0\}$.

证明: $\forall p\in M$, 取邻域 U 使 $U\cong\mathbb{R}^n$ 开子集. 构造 $f^{k+2},\cdots,f^n$ 使 $\Phi=(f^1,\cdots,f^n):U\to\mathbb{R}^n$ 满足 $d\Phi|_p$ 可逆. 运用反函数定理. 细节留作思考. □

例子. 令 $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2, F(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2-1,z), M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2=1, z\geqslant 0\}$. 则

$$\operatorname{Jac}F=\begin{pmatrix}2x & 2y & 2z\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

在 $M\setminus\{z=1\}$ 上处处可逆, 故 $M\setminus\{z=1\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的 ∂-子流形, 且边界为 $M\cap\{z=0\}$. 又

$$M\setminus\{z=0\}=\{x^2+y^2+z^2-1=0, z>0\}$$

是 $\mathbb{R}^3$ 的不带边子流形 (由隐函数定理). 故 M 是 $\mathbb{R}^3$ 子流形,$\partial M=\{(x,y,0): x^2+y^2=1\}$

例子. 令 N 是 C^∞-流形,$f\in C^\infty(N,\mathbb{R})$, 令 $M=\{x\in N: f(x)\geqslant 0\}$. 若 $\forall p\in M, df|_p\neq 0$, 则 M 是 N 的 ∂-子流形,$\partial M=\{x\in N: f(x)=0\}$.

回忆我们上学期证明过 $\forall 0<a<b<+\infty$, 存在 $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}), 0\leqslant f\leqslant 1$, 且 $[-a,a]\prec f\prec(-b,b)$. 由此易知 $\forall$ 有界区间 $I_i, J_i (1\leqslant i\leqslant n)$, 若 $\overline{I_i}\subset J_i$, 则存在 $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 使得

$$\overline{I_1}\times\cdots\overline{I_n}\prec f\prec J_1\times\cdots J_n$$

定理 4.8.14. 令 M 为紧 ∂-流形. 令 $M=U_1\cup\cdots\cup U_n$ 的开覆盖, 则它有 $\boldsymbol{C^\infty}$ **单位分解**, 即存在 $h_i\in C^\infty(M), 0\leqslant h_i\leqslant 1, \operatorname{supp}h_i\subset U_i$ 满足 $h_1+\cdots+h_n=1$.

证明: $\forall p\in M$, 取 i_p 使 $p\in U_{i_p}$. 则由以上讨论, 存在光滑 $f_p\prec U_{i_p}, f_p(p)>0$(取开集 $\widetilde{U}$ 使 $p\in\widetilde{U}\subset U_{i_p}$ 且 $\widetilde{U}\cong\mathbb{H}^m$ 开子集 Ω. 构造 Ω 上 $\geqslant 0$ 紧支集光滑函数在 p 对应的 Ω 中点上 >0), 则开覆盖

$$M=\bigcup_{p\in M}\{x\in M: f_p(x)>0\}:=\bigcup_{p\in M}W_p$$

有有限子覆盖 $M=\bigcup\limits_{p\in E}W_p$($E$ 是 M 的有限子集).$\forall i$, 令

$$g_i=\sum_{p\in E,\operatorname{supp}f_p\subset U_i}f_p$$

则 $\operatorname{supp}g_i\subset U_i$, 且 $\forall x\in M$, 因为存在 $p\in E$ 使 $x\in W_p$, 故 $f_p(x)>0$ 而 $\operatorname{supp}f_p\subset U_{i_p}$, 故

$$\sum_i g_i(x)\geqslant g_{i_p}(x)>0$$

故 $\inf\limits_{x\in M}\sum\limits_i g_i(x)>0$. 令 $h_i=\dfrac{g_i}{\sum\limits_i g_i}$ 即可. □

我们给出 C^∞ 单位分解的一个有意思的应用, 它和我们上学期证 stone-weierstrass 定理时用到的嵌入思想相近.

定理 4.8.15. *令 M 为紧 ∂-流形. 则存在 $N\in\mathbb{Z}_+$ 以及 (C^∞ 的)∂-流形嵌入映射 $F: M\to\mathbb{R}^N$.*

证明: **Claim:** 存在 $f_1,\cdots,f_N\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ 分离 M 的点, 且若令 $F=(f_1,\cdots,f_N): M\to\mathbb{R}^N$, 则 F 是浸入.

这样一来,F 是单射, 从而 $F: M\to F(M)$ 是同胚. 故 $F: M\to\mathbb{R}^N$ 是同胚.

Claim 的证明:$\forall p\in M$, 存在邻域 U,V 使 $\overline{U}\subset V,(V,\psi)$ 是坐标卡, 且存在 $\overline{U}\prec f\prec V$,$f$ 光滑. 故 M 有有限开覆盖 $M=\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}}U_\alpha$,$\overline{U_\alpha}\subset V_\alpha,(V_\alpha,\varphi_\alpha)=(V_\alpha,\varphi_\alpha^1,\cdots,\varphi_\alpha^{n_\alpha})$ 是坐标卡且有 $\overline{U_\alpha}\prec f_\alpha\prec V_\alpha$,$f_\alpha$ 光滑. 则

$$\{\varphi_\alpha^i\cdot f_\alpha:\alpha\in\mathcal{A},1\leqslant i\leqslant n_\alpha\}\cup\{f_\alpha:\alpha\in\mathcal{A}\}$$

满足 Claim 中的条件. □

推论 4.8.16. *紧 ∂-流形是度量空间.*

4.9 张量场

本节开始, 所有 ∂-流形要求是**第二可数**的. 我们回忆在作业中做过的关于张量积的内容. 本节线性空间都指有限维 $\mathbb{R}$-线性空间. 我们需要 $V_1\otimes\cdots\otimes V_N$ 的性质. 以 $N=3$ 为例.

性质:

- 若 $v_i\in V_i$, 则 $v_1\otimes v_2\otimes v_3\in V_1\otimes V_2\otimes V_3$, 有

  $$(av_1+bv_1')\otimes v_2\otimes v_3=a\cdot(v_1\otimes v_2\otimes v_3)+b\cdot(v_1'\otimes v_2\otimes v_3)$$

  (若 $v_1'\in V_1,a,b\in\mathbb{R}$). 形如 $v_1\otimes v_2\otimes v_3$ 的向量张成 $V_1\otimes V_2\otimes V_3$.

- 若 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}},\{f_\beta\}_{\beta\in\mathcal{B}},\{g_\gamma\}_{\gamma\in\mathcal{C}}$ 分别是 V_1,V_2,V_3 基, 则 $\{e_\alpha\otimes f_\beta\otimes g_\gamma:\alpha\in\mathcal{A},\beta\in\mathcal{B},\gamma\in\mathcal{C}\}$ 是 $V_1\otimes V_2\otimes V_3$ 一组基. 故

  $$\dim(V_1\otimes V_2\otimes V_3)=\dim(V_1)\dim(V_2)\dim(V_3)$$

- 任意 3-线性映射 $T: V_1\times V_2\times V_3\to W$ 都存在唯一线性 $\widetilde{T}: V_1\otimes V_2\otimes V_3\to W$ 使以下图交换

  $$\begin{tikzcd} V_1\times V_2\times V_3 \arrow[r] \arrow[dr, "\Phi"'] & W \\ & V_1\otimes V_2\otimes V_3 \arrow[u] \end{tikzcd}\qquad \Phi:(v_1,v_2,v_3)\mapsto v_1\otimes v_2\otimes v_3$$

  这给出了 “3-线性映射 $V_1\times V_2\times V_3\to W$” 和 “线性映射 $V_1\otimes V_2\otimes V_3\to W$” 之间的一一对应.

- 有唯一的同构 $(V_1\otimes V_2)\otimes V_3 \xrightarrow{\cong} V_1\otimes V_2\otimes V_3$ 满足 $(v_1\otimes v_2)\otimes v_3\mapsto v_1\otimes v_2\otimes v_3$(证: 定义这个线性映射在基上的作用). 结合律

$$\begin{aligned}(V_1\otimes V_2)\otimes V_3\cong V_1\otimes V_2\otimes V_3 &\cong V_1\otimes(V_2\otimes V_3)\\ (v_1\otimes v_2)\otimes v_3= v_1\otimes v_2\otimes v_3 &= v_1\otimes(v_2\otimes v_3)\end{aligned}$$

推论 4.9.1. "所有 N-线性映射 $V_1\times\cdots\times V_N\to\mathbb{R}$" 和对偶空间 $(V_1\otimes\cdots\otimes V_N)^*$ 中元素有自然的一一对应. 我们接下来会把二者等同. 一个 N-线性的 $\varphi: V_1\times\cdots\times V_N\to\mathbb{R}$ 会把 $\varphi(v_1,\cdots,v_N)$ 写成 $\varphi(v_1\otimes\cdots\otimes v_N)$

注记. 若 $v\in V,\varphi\in V^*$, 记 $\langle\varphi,v\rangle=\langle v,\varphi\rangle=\varphi(v)$.

例子. 若 $\varphi_1\in V_1^*,\cdots,\varphi_N\in V_N^*$, 则 $V_1\times\cdots\times V_N\to\mathbb{R},(v_1,\cdots,v_N)\mapsto\varphi_1(v_1)\cdots\varphi_N(v_N)$ 是 N-线性的. 实际上, 这些映射的线性组合给出所有 N-线性映射:

命题 4.9.2. 存在线性同构 $\Psi: V_1^*\otimes\cdots\otimes V_N^*\to(V_1\otimes\cdots\otimes V_N)^*$ 满足 $\forall\varphi_i\in V_i^*$,

$$\langle\Psi(\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_N),v_1\otimes\cdots\otimes v_N\rangle=\varphi_1(v_1)\cdots\varphi_N(v_N) \tag{(*)}$$

证明: 以 $N=3$ 为例. 取 V_1,V_2,V_3 基 $(e_\alpha)(f_\beta)(g_\gamma)$, 对应 V_1^*,V_2^*,V_3^* 中对偶基 $(\check{e^\alpha})(\check{f^\beta})(\check{g^\gamma})$. 定义线性映射 Ψ 唯一地满足

$$\left\langle\Psi\left(\check{e^\alpha}\otimes\check{f^\beta}\otimes\check{g^\gamma}\right),v_1\otimes v_2\otimes v_3\right\rangle=\langle\check{e_\alpha},v_1\rangle\langle\check{f_\beta},v_2\rangle\langle\check{g_\gamma},v_3\rangle$$

则 Ψ 满足 $(*)$. 由

$$\left\langle\Psi\left(\check{e^\alpha}\otimes\check{f^\beta}\otimes\check{g^\gamma}\right),e_{\alpha'}\otimes f_{\beta'}\otimes g_{\gamma'}\right\rangle=\delta^\alpha_{\alpha'}\cdot\delta^\beta_{\beta'}\cdot\delta^\gamma_{\gamma'}$$

知 $\{\Psi\left(\check{e^\alpha}\otimes\check{f^\beta}\otimes\check{g^\gamma}\right):\forall\alpha,\beta,\gamma\}$ 是 $\{e_\aleph\otimes f_\beta\otimes g_\gamma:\forall\alpha,\beta,\gamma\}$ 的对偶基. 故 Ψ 是线性同构. □

约定: 我们把 $V_1^*\otimes\cdots\otimes V_N^*$ 和 $(V_1\otimes\cdots\otimes V_N)^*$ 等同. 例如 $\varphi_1\otimes\varphi_2+\psi_1\otimes\psi_2\in V_1^*\otimes V_2^*$ 对应的双线性映射为 $(v_1,v_2)\mapsto\varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2)+\psi_1(v_1)\psi_2(v_2)$, 故

$$\begin{aligned}&\langle\varphi_1\otimes\varphi_2+\psi_1\otimes\psi_2,u_1\otimes u_2+v_1\otimes v_2\rangle\\ =&\varphi_1(u_1)\varphi_2(u_2)+\psi_1(u_1)\psi_2(u_2)+\varphi_1(u_1)\varphi_2(v_2)+\psi_1(v_1)\psi_2(v_2)\end{aligned}$$

定义 4.9.3. $(V\otimes V)^*\cong V^*\otimes V^*$ 中元素 ω 称为**对称 (双线性) 型**若它满足 $\forall u,v\in V$ 有 $\omega(u,v)=\omega(v,u)$. 对称的 ω 称为

半正定 若 $\forall v\in V$ 有 $\omega(v,v)\geqslant 0$

正定 若半正定且 $\omega(v,v)=0\implies v=0$

若 $\omega\in V^*\otimes V^*$ 是对称型, 取 V 一组基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 则 $n\times n$ 矩阵 $(\omega(e_i\otimes e_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 是对称矩阵, 即 ω 是 **Gram 矩阵**. 令 $\{\check{e^i}\}\subset V^*$ 为 $\{e_i\}$ 的对偶基, 则 $\omega=\sum_{i,j}\omega(e_i\otimes e_j)\check{e^i}\otimes\check{e^j}$.

(证: 验证左和右作用在 $e_i\otimes e_j$ 上相同)

我们有

$$\omega=\sum_{i,j}\omega(e_i\otimes e_j)\check{e^i}\cdot\check{e^j}$$

若定义:

定义 4.9.4. 若 $\varphi, \psi \in V^*$, 则 $\varphi \cdot \psi = \frac{1}{2}(\varphi \otimes \psi + \psi \otimes \varphi)$. 则 $\varphi \cdot \psi$ 是对称型.

记 $G = (\omega(e_i \otimes e_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, 则上式可写成

$$\omega = (\check{e^1}, \cdots, \check{e^n})G\begin{pmatrix} \check{e^1} \\ \vdots \\ \check{e^n} \end{pmatrix}$$

注意 ω 正定/半正定 $\Longleftrightarrow$Gram 矩阵正定/半正定.

例子. 若 $\dim V = 3$,$\check{e}_2\check{e}_3 = \frac{1}{2}\check{e}_2\check{e}_3 + \frac{1}{2}\check{e}_3\check{e}_2$ 对应 *Gram* 矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.$4\check{e}_1\check{e}_1 - 6\check{e}_2\check{e}_3 = 4\check{e}_1\check{e}_1 - 3\check{e}_2\check{e}_3 - 3\check{e}_3\check{e}_2$ 对应的 *Gram* 矩阵为 $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

例子. 若 ω 是 V 上内积,$\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 ω 下标准正交基, 则 *Gram* 矩阵为 $I_{n\times n}$.$\omega = \check{e}_1\check{e}_1 + \cdots + \check{e_n}\check{e_n}$.

定义 4.9.5. 令 M 为 ∂-流形. 令 $\bigotimes^k T^*M = \bigsqcup_{p\in M} \bigotimes^k T_p^*M$ 称为 M 的***k* 阶协变张量丛 (bundle of covariant k-tensors)**. 函数 $A : M \to \bigotimes^k T^*M$ 称为**(*k* 阶协变) 张量场**, 若 $\forall p \in M$ 有 $A_p \in \bigotimes^k T_p^*M$.

例子. 令 U 为 $\mathbb{R}^n$ 开子集. 则 U 上的 k 阶协变张量场形如

$$A = \sum_{1\leqslant i_1,\cdots,i_k\leqslant n} f_{i_1,\cdots,i_k} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k}, f_{i_1,\cdots,i_k} : U \to \mathbb{R}$$

$\forall p, dx^1|_p, \cdots dx^n|_p$ 是 $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p$ 的对偶基. 因此

$$\left\langle A_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_p \otimes \cdots \otimes \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right|_p \right\rangle = f_{i_1,\cdots,i_k}(p)$$

我们说 A 是 ***Borel* 的/C^r 的**, 若每个 $f_{i_1,\cdots,i_k}$ 都是 *Borel* 的/C^r 的. 更一般地:

定义 4.9.6. ∂-流形 M 上的 k 阶协变张量场 A 称为 **Borel 的/C^r 的**若 M 上存在图册 $\mathfrak{U}$ 使 $\forall (U, \varphi) \in \mathfrak{U}$, 有

$$A|_U = \sum_{1\leqslant i_1,\cdots,i_k\leqslant n} f_{i_1,\cdots,i_k} d\varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes d\varphi^{i_k}$$

其中每个 $f_{i_1,\cdots,i_k}$ 都是 Borel 的/C^r 的.

注记. 若 (U, ψ) 是坐标卡, 则 $d\varphi^i = \sum_j \frac{\partial \varphi^i}{\partial \psi^j} d\psi^j$, 故

$$A|_u = \sum_{i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_k} f_{i_1,\cdots,i_k} \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial \psi_1^j} \cdots \frac{\partial \varphi_k^i}{\partial \psi_k^j} d\psi^{j_1} \otimes \cdots \otimes d\psi^{j_k}$$

故 $A|_U$ 在 (U, ψ) 下也是 Borel/C^r 的. 由此可知:

命题 4.9.7. *M 上的协变张量场 A 的 Borel 性/C^r 性与图册的选取无关.*

回忆若 $T_i : V_i \to V_i^*$ 是线性映射,$1 \leqslant i \leqslant k$, 则有唯一的线性映射

$$T_1 \otimes \cdots \otimes T_k : V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \to V_1' \otimes \cdots \otimes V_k', v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \mapsto T_1 v_1 \otimes \cdots \otimes T_k v_k$$

(可以先把它定义在一组基上, 再进行线性扩张)

定义 4.9.8. 令 $F : M \to N$ 是 ∂-流形的光滑映射.A 是 N 的 k 阶协变张量场. 定义 $F^*A : M \to \bigotimes^k T^*M$, 若 $p \in M$, 则

$$(F^*A)_p = (F^* \otimes \cdots \otimes F^*)(A_{F(p)})$$

这里 $F^* \otimes \cdots \otimes F^* : T^*_{F(p)}N \otimes \cdots \otimes T^*_{F(p)}N \to T^*_pM \otimes \cdots \otimes T^*_pM$. 特别地,$k = 0$ 时 A 是函数 $A : N \to \mathbb{R}$, 则 $(F^*A)_p = A_{F(p)}$, 即 $F^*A = A \circ F$.

例子. 对以上 $F : M \to N$, 令 $(U, \varphi) = (U, \varphi^1, \cdots, \varphi^m)$ 和 $(V, \psi) = (V, \psi^1, \cdots, \psi^n)$ 分别为 M, N 坐标卡且 $F(U) \subset N$. 取 A 为 V 上 k 阶协变张量场. 若 $A = \sum\limits_{1 \leqslant j_1, \cdots j_k \leqslant n} f_{j_1, \cdots, j_k} d\psi^{j_1} \otimes \cdots \otimes d\psi^{j_k}$ 则

$$\forall p \in U, F^*\left(d\psi^j\big|_{F(p)}\right) = d\left(\psi^j \circ F\right)\big|_p = \sum_i \frac{\partial\left(\psi^j \circ F\right)}{\partial \varphi^i} d\varphi^i \bigg|_p$$

简记为 $F^* d\psi^j = \sum\limits_i \dfrac{\partial(\psi^j \circ F)}{\partial \varphi^i} d\varphi^i$. 回忆 $\dfrac{\partial\left(\psi^j \circ F\right)}{\partial \varphi^i} = \left(\partial_i\left(\psi^j \circ F \circ \varphi^{-1}\right)\right) \circ \varphi$. 由此可知

$$F^*A = \sum_{\substack{1 \leqslant j_1, \cdots, j_k \leqslant n \\ 1 \leqslant i_1, \cdots, i_k \leqslant m}} (f_{j_1, \cdots, j_k} \circ F) \cdot \frac{\partial(\psi^{j_1} \circ F)}{\partial \psi^{i_1}} \cdots \frac{\partial(\psi^{j_k} \circ F)}{\partial \varphi^{i_k}} \cdot d\varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes d\varphi^{i_n}$$

由此可得:

命题 4.9.9. *令 $F : M \to N$ 为光滑的 ∂-流形映射, 令 A 是 N 上的协变张量场. 若 N 是 Borel/C^r 的, 则 F^*A 是 Borel/C^r 的.*

4.10 黎曼流形和第一型积分

定义 4.10.1. 令 M 为 ∂-流形,M 上的一个光滑 2 阶协变的 (对称) 正定张量场 g 称为 **Riemann 度量**.(M, g) 称为**∂-Riemann 流形**.

因此,$\forall p \in M, g|_p \in T_p^*M \otimes T_p^*M = (T_pM \otimes T_pM)^*$. 若 $\xi, \eta \in T_pM$ 为切向量, 则 $g(\xi, \eta) = g(\eta, \xi)$ 是它们之间的内积,$\|\xi\| = \sqrt{g(\xi, \xi)}$ 是 ξ 的**长度**.

例子. 若 $(U, \varphi^1, \cdots, \varphi^n)$ 是 M 的坐标卡, 则

$$g|_U = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} g_{ij} d\varphi^i d\varphi^j = \left(d\varphi^1, \ldots, d\varphi^n\right) G \begin{pmatrix} d\varphi^1 \\ \vdots \\ d\varphi^n \end{pmatrix}$$

$G=(g_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 是 *Gram* 矩阵.$g\left(\dfrac{\partial}{\partial\varphi^i}\otimes\dfrac{\partial}{\partial\varphi^j}\right)=g_{ij}$. 注意 (若 $i\leqslant j, i'\leqslant j'$)

$$\left\langle d\varphi^i d\varphi^j, \frac{\partial}{\partial\varphi^{i'}}\otimes\frac{\partial}{\partial\varphi^{j'}}\right\rangle=\begin{cases}\delta^i_{i'}\delta^j_{j'} & 若 i=j\\ \dfrac{1}{2}\delta^i_{i'}\delta^j_{j'} & 若 i\neq j\end{cases}$$

例子. $\mathbb{R}^n$ 上的标准 *Riemann* 度量为 $dx^1dx^1+\cdots+dx^ndx^n$.

命题 4.10.2. 令 $F: M\to N$ 为 ∂-流形的光滑浸入,g 是 N 上的 *Riemann* 度量, 则 F^*g 是 M 上的 *Riemann* 度量.

证明: F^*g 光滑,$\forall p\in M,\xi,\eta\in T_pM$, 有

$$(F^*g)(\xi\otimes\eta)=g(dF\cdot\xi\otimes dF\cdot\eta)$$

由 $dF: T_pM\to T_{F(p)}N$ 是单射知 $F^*g|_p: T_pM\otimes T_pM\to\mathbb{R}$ 是对称正定型. $\square$

定义 4.10.3. 若 $(M,g),(N,\widetilde{g})$ 是 ∂-Riemann 流形, 一个微分同胚 $F: M\to N$ 称为**等距微分同胚 (isometry)** 若 $F^*\widetilde{g}=g$. 注意 $F^{-1}: N\to M$ 也是 isometry. 我们说 M 和 N 是 **isometric**.

例子. 令 M 是 ∂-流形,(N,g) 是 *Riemann* 流形,$F: M\to N$ 是 ∂-流形的嵌入映射. 则 $F(M)$ 是 N 的 ∂-子流形. 令 $\iota: F(M)\to N, F(p)\mapsto F(p)$ 则 $F(M)$ 有标准的来源于 N 的 *Riemann* 度量, 即 ι^*g. 称 $(F(M),\iota^*g)$ 是 (N,g) 的***∂-Riemann* 子流形**. 我们说过若 $p\in M$, 则 $T_{F(p)}F(M)$ 自然地是 $T_{F(p)}N$ 的线性子空间 (通过 $d\iota$ 对应). 则 $\forall\xi,\eta\in T_{F(p)}N$ 有 $\iota^*g(\xi,\eta)=g(\xi,\eta)$.

$$F:(M,F^*g)\to(F(M),\iota^*g)$$

是等距 C^∞ 同胚. 因此我们可以通过 (M,F^*g) 来研究 (N,g) 的 ∂-*Riemann* 子流形 $(F(M),\iota^*g)$.

例子. 令 Ω 为 $\mathbb{R}^m$ 或 $\mathbb{H}^m$ 开子集,$F:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 是 ∂-流形嵌入.(特别地,$\mathrm{Jac}\,F:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 是单射的 $n\times m$ 矩阵) 我们通过计算 $F^*(dx^1dx^1+\cdots+dx^ndx^n)$ 来计算 $F(\Omega)$ 上的标准 *Riemann* 度量. 回忆 $F^*\begin{pmatrix}dx^1\\ \vdots\\ dx^n\end{pmatrix}=\mathrm{Jac}\,F\begin{pmatrix}dx^1\\ \vdots\\ dx^m\end{pmatrix}$, 故

$$\begin{aligned}F^*\left(dx^1dx^1+\cdots+dx^ndx^n\right)&=\left(F^*dx^1\right)^2+\cdots+(F^*dx^n)^2\\&=\left(F^*dx^1,\cdots,F^*dx^n\right)\begin{pmatrix}F^*dx^1\\ \vdots\\ F^*dx^n\end{pmatrix}\\&=\left(dx^1,\cdots,dx^m\right)(\mathrm{Jac}\,F)^{\mathrm{T}}(\mathrm{Jac}\,F)\begin{pmatrix}dx^1\\ \vdots\\ dx^m\end{pmatrix}\end{aligned}$$

因此 Ω 作为 $\mathbb{R}^n$ 的 *Riemann* 子流形的 *Riemann* 度量在 $\dfrac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x^m}$ 下的 *Gram* 矩阵是 $(\mathrm{Jac}\,F)^{\mathrm{T}}(\mathrm{Jac}\,F)$.

考虑如何定义一个 Riemann 流形 M 的体积 $\mathrm{Vol}(M)$. 若 M 带边, 令 $\mathrm{Int}\, M = M \setminus \partial M$, 则 $\mathrm{Vol}(M) = \mathrm{Vol}(\mathrm{Int}\, M)$. 若 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中开子集 $(0,1)^n$, 且 M 给予内积 g, 其在标准坐标基 $e_1, \cdots, e_n$ 下 Gram 矩阵为 G, 则 $G : M \to \mathbb{R}^{n\times n}$ 光滑. 假设 G 是常量, 令 $\xi_1, \cdots, \xi_n \in \mathbb{R}^n$ 为内积 g 下的一组标准正交基, 即 $g(\xi_i, \xi_j) = \delta_{i,j}$. 记 $(e_1, \cdots, e_n) = (\xi_1, \cdots, \xi_n)A, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 则我们希望 M 作为 $e_1, \cdots e_n$ 张成平行多面体的体积是 $\mathrm{Vol}(M) = |\det A|$. 由 $A\begin{pmatrix} \check{e_1} \\ \vdots \\ \check{e_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \check{\xi_1} \\ \vdots \\ \check{\xi_n} \end{pmatrix}$,

$$g = (\check{\xi_1}, \cdots, \check{\xi_n}) \begin{pmatrix} \check{\xi_1} \\ \vdots \\ \check{\xi_n} \end{pmatrix} = (\check{e_1}, \cdots, \check{e_n}) A^{\mathrm{T}} A \begin{pmatrix} \check{e_1} \\ \vdots \\ \check{e_n} \end{pmatrix}$$

故 g 在 $e_1, \cdots, e_n$ 下的 Gram 矩阵为 $G = A^{\mathrm{T}} A$, 故 $|\det A| = \sqrt{\det G}$. 故 $\mathrm{Vol}(M) = \sqrt{\det G} = \int_{(0,1)^n} \sqrt{\det G} dm$.

因此, 一般情况下, 若 M 是 $\mathbb{R}^n$ 开子集, 在 $e_1, \cdots e_n$ 下 g 的 Gram 矩阵为 G, 则希望 $\mathrm{Vol}(M) = \int_M \sqrt{\det M} dx_1 \cdots dx_n$. 更一般地, 若 $f : M \to \mathbb{R}$, 我们希望定义积分

$$\int_M f dV_g = \int_M f \sqrt{\det G} dx^1 \cdots dx^n$$

定义 4.10.4. 令 (M, g) 为 Riemann 流形,$f : M \to [0, +\infty]$ 为 Borel 函数. 若 $\{x \in M : f(x) > 0\}$ 被包含在坐标卡 $(U, \varphi) = (U, \varphi^1, \cdots, \varphi^n)$ 中, 记光滑映射 $G : U \to \mathbb{R}^{n\times n}$ 为

$$g|_p = (d\varphi^1, \cdots, d\varphi^n) G(p) \begin{pmatrix} d\varphi^1 \\ \vdots \\ d\varphi^n \end{pmatrix}, p \in U$$

则定义

$$\int_M f dV_g = \int_{\varphi(U)} f \circ \varphi^{-1} \sqrt{\det (G \circ \varphi^{-1})} dm$$

(m 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度)

注记. 实际计算时常把 U 等同于 $\mathbb{R}^n$ 开子集, 算出 g 在 U 上的表达式, 即 $\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ 下的 Gram 矩阵 G, 则 $\int_M f dV_g = \int_{\varphi(U)} f \sqrt{\det G} dm$.

引理 4.10.5. *以上定义与 (U, φ) 的选取无关.*

证明: 令 $(V, \psi^1, \cdots, \psi^n)$ 为包含 $\{x \in M : f(x) > 0\}$ 的坐标卡. 通过把 U, V 换成 $U \cap V$, 不妨假设 $U = V$. 令 $F = \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U) \to \varphi(U)$, 则由积分换元公式

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(U)} f \circ \varphi^{-1} \sqrt{\det (G \circ \varphi^{-1})} dm &= \int_{\psi(U)} f \circ \varphi^{-1} \circ F \cdot \sqrt{\det (G \circ \varphi^{-1} \circ F)} \cdot |\mathrm{J}(F)| dm \\ &= \int_{\psi(U)} f \circ \psi^{-1} \sqrt{\det (G \circ \psi^{-1}) \cdot (\mathrm{J}(F))^2} dm \end{aligned}$$

注意 $\begin{pmatrix} d\varphi^1 \\ \vdots \\ d\varphi^n \end{pmatrix} = (\mathrm{Jac}(F)\cdot\psi)\circ \begin{pmatrix} d\psi^1 \\ \vdots \\ d\psi^n \end{pmatrix}$, 回忆 $\forall p \in V$, $\begin{pmatrix} d\varphi^1 \\ \vdots \\ d\varphi^n \end{pmatrix}_p = \mathrm{Jac}\left(\varphi\circ\psi^{-1}\right)\big|_{\psi(p)} \begin{pmatrix} d\psi^1 \\ \vdots \\ d\psi^n \end{pmatrix}$,
故

$$\begin{aligned} g &= (d\varphi^1,\cdots,d\varphi^n)G \begin{pmatrix} d\varphi^1 \\ \vdots \\ d\varphi^n \end{pmatrix} \\ &= (d\psi^1,\cdots,d\psi^n)(\mathrm{Jac}(F)\circ\psi)^{\mathrm{T}}\cdot G\cdot(\mathrm{Jac}(F)\circ\psi) \begin{pmatrix} d\psi^1 \\ \vdots \\ d\psi^n \end{pmatrix} \\ &:= (d\psi^1,\cdots,d\psi^n)\widetilde{G} \begin{pmatrix} d\psi^1 \\ \vdots \\ d\psi^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

因此

$$\int_{\psi(U)} f\circ\psi^{-1}\sqrt{\det(G\circ\psi^{-1})\cdot(\mathrm{J}(F))^2}dm = \int_{\psi(U)} f\circ\psi^{-1}\sqrt{\det(\widetilde{G}\circ\psi^{-1})}dm = \text{用}(V,\psi)\text{算的积分}$$

□

引理 4.10.6. *令 M 为 (第二可数) 微分流形. 则 $M = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 其中每个 E_n 都是 Borel 集, 且存在包含 E_n 的坐标卡.*

证明: $\forall x \in M$, 存在包含 x 的坐标卡 (U_x, φ_x), 则 $M = \bigcup_{x\in M} U_x$. 因为 M 是 Lindelöf 空间, 存在 $x_1, x_2, \cdots$ 使 $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{x_n}$. 令 $E_1 = U_{x_1}, E_{n+1} = U_{x_{n+1}} \setminus (U_{x_1}\cup\cdots\cup U_{x_n})$. □

定义 4.10.7. 令 M 为 Riemann 流形,$f : M \to [0, +\infty]$ 是 Borel 函数, 则定义

$$\int_M f dV_g = \sum_{n=1}^{\infty}\int_M f\cdot\chi_{E_n} dV_g$$

这里,$M = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$.$E_n$ 是 Borel 的且被包含在 M 的某个坐标卡里.

引理 4.10.8. *以上定义与分解 $M = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 的选取无关.*

证明: 若有类似分解 $M = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{E_n}$, 则

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_M f\cdot\chi_{E_i} dV_g = \sum_{i,j=1}^{\infty}\int_M f\cdot\chi_{E_i\cap\widetilde{E_j}} dV_g = \sum_{j=1}^{\infty}\int_M f\cdot\chi_{\widetilde{E_j}} dV_g$$

□

引理 4.10.9. *若 $f_n : M \to [0,+\infty]$ 是一列关于 n 递增的 Borel 函数, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_M f_n dV_g = \int_M (\lim\limits_{n\to\infty} f_n) dV_g$.*

证明: 若 $\{x\in M : f(x)>0\}$ 被包含在坐标卡内, 则由单调收敛定理可得. 一般情况, 令 $M = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$,$E_i$ 是 Borel 集且包含在坐标卡内. 令 $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_M f_n dV_g &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\int_M f_n\cdot\chi_{E_i} dV_g\\ &\overset{\text{单调收敛}}{=} \sum_{i=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\int_M f_n\chi_{E_i} dV_g\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\int_M f\chi_{E_i} dV_g\\ &= \int_M f dV_g\end{aligned}$$

□

引理 4.10.10. *若 $f_1, f_2 : M \to [0,+\infty]$ 是 Borel 的且 $a_1, a_2 \in [0,+\infty]$, 则 $\int_M (a_1f_1+a_2f_2) dV_g = a_1\int_M f_1 dV_g + a_2\int_M f_2 dV_g$.*

证明: 化成 $\{x : f_1(x), f_2(x) > 0\}$ 在坐标卡内的情形. □

命题 4.10.11. *$m_g : \mathcal{B}_M \to [0,+\infty], E \to \int_M \chi_E dV_g$ 是 M 上的 Radon 测度.*

证明: 可数可加性由以上两个引理可得. 故 m_g 是 Borel 测度. 令 $K\subset M$ 为紧集, 则 K 在 M 内有有限开覆盖 $K\subset U_1\cup\cdots\cup U_k$,$(U_i,\varphi_i)$ 是 M 的坐标卡. 令 $h_1,\cdots,h_k\in C_c(M)$ 为此开覆盖下的单位分解, 则 $m_g(K) = \sum\limits_{j=1}^{k}\int_M \chi_K\cdot h_j dV_g$. 而 $\int_M \chi_K\cdot h_j dV_g = \varphi_j(K\cap\operatorname{supp} h_j)$ 上有界 Borel 函数的 Lebesgue 积分 $<+\infty$. 故 m_g 在紧集上取值有限, 故由 M 第二可分知 m_g 是 Radon 测度. □

命题 4.10.12. *令 $f : M \to [0,+\infty]$ 是 Borel 可测函数. 则*

$$\int_M f dV_g = \int_M f dm_g \tag{$*$}$$

*因此我们不区分 dV_g 和 dm_g, 并把 V_g 称为 M 上的**体积测度**.*

证明: $(*)$ 在 f 是特征函数时成立, 故在 f 是 $M\to[0,+\infty]$ 的简单函数时成立. 一般情况取递增非负简单函数列逼近即可. □

我们把 $\int_M 1 dV_g$ 称为 M 的**体积**.

定义 4.10.13. 若 $f : M\to\mathbb{R}$ 是 Borel 可测的, 且 $\|f\|_1 = \int_M |f| dV_g < +\infty$, 则 $\int_M f dV_g = \int_M f^+ dV_g - \int_M f^- dV_g$. 当 M 带边时,$\int_M f dV_g$ 定义为 $\int_{\operatorname{Int} M} f dV_g$.

例子. 令 $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ 为开集,$F:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 为 C^∞ 嵌入.$M=F(\Omega)$ 看作 $\mathbb{R}^m$ 的 *Riemann* 子流形.$V\supset M$ 是 $\mathbb{R}^n$ 开子集,$f:V\to\mathbb{R}$ 是 *Borel* 的. 计算 $\displaystyle\int_M f dV_g$.

证明*:*

$$F^*\left(dx^1dx^1+\cdots+dx^ndx^n\right)=\left(dx^1,\cdots,dx^m\right)(\mathrm{Jac}\,F)^{\mathrm{T}}(\mathrm{Jac}\,F)\begin{pmatrix}dx^1\\ \vdots\\ dx^m\end{pmatrix}$$

故 $\displaystyle\int_M f dV_g=\int_\Omega(f\circ F)\cdot\sqrt{\det(\mathrm{Jac}\,F)^{\mathrm{T}}(\mathrm{Jac}\,F)}dx_1\cdots dx_n.$ □

我们来讨论曲线上的积分. 回忆若 M 是 C^∞ 流形,$\gamma:[a,b]\to M$ 光滑,$a\leqslant t_0\leqslant b$, 则 $\gamma'(t_0)=\dfrac{d\gamma}{dt}|_{t_0}\in T_{\gamma(t_0)}M$ 定义为: $\forall f\in\mathscr{C}^\infty_{M,\gamma(t_0)}$ 有 $\langle\gamma',df\rangle|_{t_0}=(f\circ\gamma)'(t_0)$. 而

$$\left\langle d\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial t},df\right\rangle=\left\langle\frac{\partial}{\partial t},\gamma^*df\right\rangle=\left\langle\frac{\partial}{\partial t},d(f\circ\gamma)\right\rangle=(f\circ\gamma)'$$

故 $\gamma'(t_0)=d\gamma\cdot\dfrac{\partial}{\partial t}|_{t_0}$.

例子. 令 $\gamma:(a,b)\to M$ 为 C^∞-嵌入,(M,g) 是 *Riemann* 流形,$f:M\to[0,+\infty]$ 是 *Borel* 函数. 令 $C=\gamma([a,b])$, 则 $\displaystyle\int_C f=\int_a^b(f\circ\gamma(t))\cdot\sqrt{g(\gamma'(t),\gamma'(t))}dt.$

证明*:* 我们来计算 γ^*g: 令 $t:x\in\mathbb{R}\to x\in\mathbb{R}$ 为 $\mathbb{R}$ 的标准坐标, 则 $\forall t_0\in\mathbb{R}$,

$$\left.\left\langle\gamma^*g,\frac{\partial}{\partial t}\otimes\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle\right|_{t_0}=\left.\left\langle g,d\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial t}\otimes d\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle\right|_{t_0}=g(\gamma'(t_0),\gamma'(t_0))$$

故 $\gamma^*g=g(\gamma'(t),\gamma'(t))dt^2.g(\gamma'(t),\gamma'(t))$ 是 1×1Gram 矩阵函数, 得证. □

定义 4.10.14. 令 $\gamma:(a,b)\to M$ 为 C^∞ 映射,(M,g) 是 Riemann 流形.(即 γ 是 M 中的 C^∞ 道路)$f:M\to\mathbb{R}$ 是 Borel 函数, 即 f 沿 γ 的积分定义为

$$\int_\gamma f=\int_a^b(f\circ\gamma)\cdot\sqrt{g(\gamma'(t),\gamma'(t))}dt$$

特别地,$\displaystyle\int_\gamma 1$ 称为 γ 的**长度**.

4.11 微分形式

Faraday 定律告诉我们, 若 $\vec{B},\vec{E}$ 分别是 $\mathbb{R}^3$ 中的磁场和电场, 则对 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面 Σ 有

$$\oint_{\partial\Sigma}\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\frac{d}{dt}\iint_\Sigma\vec{B}\cdot\vec{S}$$

$\displaystyle\iint_\Sigma\vec{B}\cdot d\vec{S}$ 是磁通量. 若取 Σ 为两个向量 $\xi,\eta\in\mathbb{R}^3$ 张成的**有向**平行四边形 $\Sigma_{\xi,\eta}$,$\vec{B}$ 是常量, 则 $\omega(\xi,\eta)=\displaystyle\iint_{\Sigma_{\xi,\eta}}\vec{B}\cdot d\vec{S}$ 是关于 ξ,η 的线性双线性函数, 且 $\Sigma_{\eta,\xi}$ 与 $\Sigma_{\xi,\eta}$ 有相反的方向. 故

$\omega(\eta,\xi)=-\omega(\xi,\eta)$. 我们把这样的 ω 称为 $\mathbb{R}^3$ 的 2-形式. 这启发我们定义一般的微分形式. 令 V 为有限 $\mathbb{R}$-线性空间,$V^{\otimes k}=V\otimes\cdots\otimes V(k\text{个}).S_k=\{\text{双射}\{1,\cdots,k\}\to\{1,\cdots k\}\}$.

$$\forall\sigma\in S_k, V\times\cdots\times V\to V\otimes\cdots\otimes V,(v_1,\cdots,v_k)\mapsto v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(k)}$$

是 k-线性的, 故给出线性映射

$$\sigma:V^{\otimes k}\to V^{\otimes k},\sigma(v_1\otimes\cdots\otimes v_k)=v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(k)}$$

也可以先用上式定义 σ 在一组基上的作用, 再线性扩张.

定义 4.11.1. 若 $\xi\in V^{\otimes k}$ 满足 $\forall\sigma\in S_k$ 有 $\sigma(\xi)=\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\xi$, 则称 ξ 为**交错 (alternating) 张量**或者**反对称 (skew-symmetric) 张量**. 这样的向量构成的子空间记为 $\Lambda^k(V)=\Lambda^kV$.

例子. 若 $u,v\in V$, 则 $u\wedge v:=u\otimes v-v\otimes u\in\Lambda^2(V)$.

例子. 令 $\psi\in(V^*)^{\otimes k}=(V^{\otimes k})^*$, 则 $\psi\in\Lambda^k(V^*)$ 当且仅当 $\forall\sigma\in S_k,\forall v_1,\cdots,v_k\in V$, 有

$$\psi\left(v_1\otimes\cdots\otimes v_k\right)=\operatorname{sgn}(\sigma)\psi\left(v_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(k)}\right)$$

证明: $\forall\sigma\in S_k$ 有 $\langle\psi,\xi\rangle=\langle\sigma(\psi),\sigma(\xi)\rangle$. 而以上条件说的是

$$\begin{aligned}&\forall\xi\in V^{\otimes k},\forall\sigma\in S_k,\langle\psi,\xi\rangle=\operatorname{sgn}(\sigma)\left\langle\psi,\sigma^{-1}\xi\right\rangle\\ \Longleftrightarrow&\forall\xi\in V^{\otimes k},\forall\sigma\in S_k,\langle\psi,\xi\rangle=\operatorname{sgn}(\sigma)\left\langle\sigma(\psi),\xi\right\rangle\\ \Longleftrightarrow&\psi=\operatorname{sgn}(\sigma)\sigma(\psi)\end{aligned}$$

□

定义 4.11.2. 线性映射 **Alt**: $V^{\otimes k}\to V^{\otimes k}$ 定义为

$$\operatorname{Alt}(\xi)=\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\sigma(\xi)$$

若 $v_1,\cdots v_k\in V$, 记 $v_1\wedge\cdots\wedge v_k=k!\operatorname{Alt}(v_1\otimes\cdots\otimes v_k)=\sum_\sigma\operatorname{sgn}(\sigma)v_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(k)}$, 称为 $v_1,\cdots,v_k$ 的**外积 (exterior product)/楔积 (wedge product)**.

命题 4.11.3. Alt 是 $V^{\otimes k}$ 上的投影算子, 即 $\operatorname{Alt}\circ\operatorname{Alt}=\operatorname{Alt}$, 且 $\operatorname{Alt}(V^{\otimes k})=\Lambda^k(V)$.

证明: 由 $\operatorname{sgn}:S_k\to\{\pm1\}$ 是群同态可得: 若 $\sigma\in S_k$, 则

$$\begin{aligned}\sigma(\operatorname{Alt}(\xi))&=\frac{1}{k!}\sigma\cdot\sum_\tau\operatorname{sgn}(\tau)\tau(\xi)\overset{\theta=\sigma\tau}{=}\frac{1}{k!}\sum_\theta\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}\theta)\theta(\xi)\\&=\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})\cdot\frac{1}{k!}\sum_\theta\operatorname{sgn}(\theta)\theta(\xi)=\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\operatorname{Alt}(\xi)\end{aligned}$$

故 $\operatorname{Alt}\xi\in\Lambda^k(V)$. 故 $\operatorname{Alt}(V^{\otimes k})\subset\Lambda^k(V)$. 反之, 若 $\xi\in\Lambda^k(V)$, 则 $\sigma(\xi)=\operatorname{sgn}(\sigma)\xi$. 故

$$\operatorname{Alt}(\xi)=\frac{1}{k!}\sum_\theta\operatorname{sgn}(\sigma)\sigma(\xi)=\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\xi=\xi$$

故 $\xi=\operatorname{Alt}\xi\in\operatorname{Alt}(V^{\otimes k})$. 故 $\operatorname{Alt}(V^{\otimes k})=\Lambda^k(V)$. 由 $\eta=\operatorname{Alt}\eta(\forall\eta\in\Lambda^k(V))$, 把 η 换成 $\operatorname{Alt}\xi(\forall\xi\in V^{\otimes k})$ 知 $\operatorname{Alt}\xi=\operatorname{Alt}\circ\operatorname{Alt}\xi$. □

推论 4.11.4. 形如 $v_1\wedge\cdots\wedge v_k$ 的向量张成 $\Lambda^k(V)$.

注记. $V\times\cdots\times V\to\Lambda^k(V),(v_1,\cdots,v_k)\mapsto v_1\wedge\cdots\wedge v_k$ 是 k-线性映射, 因为它是张量积映射 $V\times\cdots\times V\to V^{\otimes k}$ 和 $k!\cdot\mathrm{Alt}$ 的复合.

命题 4.11.5. 令 $e_1,\cdots e_n$ 为 n 维空间 V 的一组基, 则

$$\mathscr{E}=\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}:1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n\}$$

是 $\Lambda^k(V)$ 的一组基. 因此 $\dim\Lambda^k(V)=\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}$. 特别地, 若 $k>n$, 则 $\dim\Lambda^k(V)=0$.

证明: 已知形如 $\xi=e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}(1\leqslant i_1\leqslant i_k\leqslant n)$ 的向量张成 $\Lambda^k(V)$ 且对 $1,\cdots,k$ 的置换 σ 有 $\xi=(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}e_{i_{\sigma(1)}}\wedge\cdots\wedge e_{i_{\sigma(k)}}$. 故 $\mathrm{span}\,\mathscr{E}=\Lambda^k(V)$. 只需证 $\mathscr{E}$ 中元素线性无关.$\forall 1\leqslant i_1,j_1,\cdots,i_k,j_k\leqslant n$,

$$\left\langle e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_k},\check{e^{j_1}}\otimes\cdots\otimes \check{e^{j_k}}\right\rangle=\delta_{i_1}^{j_1}\cdots\delta_{i_k}^{j_k}$$

由此得若 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n,1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n$, 则

$$\left\langle e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k},\check{e^{j_1}}\otimes\cdots\otimes \check{e^{j_k}}\right\rangle=\delta_{i_1}^{j_1}\cdots\delta_{i_k}^{j_k}$$

若 $\psi=\sum\limits_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}a_{i_1\cdots i_k}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}=0$, 则

$$a_{i_1\cdots i_k}=\left\langle\psi,\check{e^{i_1}}\otimes\cdots\otimes \check{e^{i_k}}\right\rangle=0$$

□

命题 4.11.6. 令 $k_1,\cdots k_m\in\{0,1,2\cdots\}$, 则存在 m-线性映射

$$\Phi:\Lambda^{k_1}(V)\times\cdots\times\Lambda^{k_m}(V)\to\Lambda^{k_1+\cdots+k_m}(V)$$

满足 $\forall v_1^1,\cdots v_{k_1}^1,\cdots,v_1^m,\cdots,v_{k_m}^m\in V$ 有

$$\Phi\left(v_1^1\wedge\cdots\wedge v_{k_1}^1,\cdots,v_1^m\wedge\cdots\wedge v_{k_m}^m\right)=v_1^1\wedge\cdots\wedge v_{k_1}^1\wedge\cdots\wedge v_1^m\wedge\cdots\wedge v_{k_m}^m \tag{$*$}$$

若 $\xi_1\in\Lambda^{k_1}(V),\cdots,\xi_m\in\Lambda^{k_m}(V)$, 记 $\Phi(\xi_1,\cdots,\xi_m)$ 为$\boldsymbol{\xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_m}$, 称为 $\xi_1,\cdots,\xi_m$ 的**外积**.

证明: 我们要构造 $\Phi:\Lambda^{k_1}(V)\otimes\cdots\otimes\Lambda^{k_m}(V)\to\Lambda^{k_1+\cdots+k_m}(V)$ 满足 $(*)$. 先定义 Φ 在一组基上满足 $(*)$, 再进行线性扩张即可. □

命题 4.11.7. 若 $\omega\in\Lambda^k(V),\eta\in\Lambda^l(V)$, 记 $k=\deg(\omega),l=\deg(\eta)$, 则 $\omega\wedge\eta=(-1)^{k+l}\eta\wedge\omega$.

证明: 对 $\omega=v_1\wedge\cdots\wedge v_k,\eta=u_1\wedge\cdots\wedge u_l$ 的形式验证即可. □

回忆若 $F:V\to W$ 是线性映射, 则因为

$$V\times\cdots\times V\to W^{\otimes k},(v_1,\cdots v_k)\mapsto Fv_1\otimes\cdots\otimes Fv_k$$

是 k-线性的, 我们有线性映射

$$F^{\otimes k}:V^{\otimes k}\to W^{\otimes k},v_1\otimes\cdots\otimes v_k\mapsto F_{v_1}\otimes\cdots\otimes F_{v_k}$$

易知 $\forall\sigma\in S_k$ 有 $F^{\otimes k}\cdot\sigma=\sigma\cdot F^{\otimes k}$, 从而有:

命题 4.11.8. $F^{\otimes k}\cdot \mathrm{Alt}=\mathrm{Alt}\cdot F^{\otimes k}$. 因此 $F^{\otimes k}$ 限制到映射 $F^{\otimes k}:\Lambda^k(V)\to\Lambda^k(W)$.

证明:
$$\begin{aligned}F^{\otimes k}(\Lambda^k(V))&=F^{\otimes k}\,\mathrm{Alt}(V^{\otimes k})=\mathrm{Alt}\,F^{\otimes k}(V^{\otimes k})\\&\subset\mathrm{Alt}(W^{\otimes k})=\Lambda^k(W)\end{aligned}$$

□

我们接下来研究 $\Lambda^n(V), n=\dim V$. 我们知道 $\dim\Lambda^n(V)=1$, 因此, 若 $e_1,\cdots e_n$ 是 V 一组基,$v_1,\cdots v_n\in V$, 则 $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ 使 $1\wedge\cdots\wedge v_n=\lambda e_1\wedge\cdots\wedge e_n$. 我们想确定 λ 的值. 简单起见, 把 λ 记为$\dfrac{\boldsymbol{v_1\wedge\cdots\wedge v_n}}{\boldsymbol{e_1\wedge\cdots\wedge e_n}}$.

命题 4.11.9. 令 $e_1,\cdots,e_n$ 为 V 的一组基,$v_1,\cdots v_n\in V$ 在此基下的矩阵表示是 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 即 $(v_1,\cdots,v_n)=(e_1,\cdots,v_n)A$, 则 $v_1\wedge\cdots\wedge v_n=\det A\cdot e_1\wedge\cdots\wedge e_n$.

证明: 通过线性同构 $V\cong\mathbb{R}^n$, 不妨假设 $V=\mathbb{R}^n$,$e_1,\cdots,e_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准坐标向量. 把 $v_1,\cdots,v_n$ 看成列向量, 则 v_j 是 A 的第 j 列, 即 $A=(v_1,\cdots,v_n)$. 定义

$$\lambda:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}, A=(v_1,\cdots,v_n)\mapsto\lambda(A)\text{满足}v_1\wedge\cdots\wedge v_n=\lambda(A)e_1\wedge\cdots\wedge e_n$$

则 λ 关于 n 个列向量是 n-线性的, 且是反对称的 (交换 A 两列改变 $\lambda(A)$ 正负号), 而由线性代数知识可知这样的函数 λ 正比于行列式函数 det, 显然 $A=I_{n\times n}$ 时 λ 和 det 取值都是 1. 故 $\lambda(A)=\det A$. □

定义 4.11.10. n 维线性空间 V 中两组基 $\{e_1,\cdots,e_n\},\{f_1,\cdots,f_n\}$ 称为**同向**的, 若 $\dfrac{e_1\wedge\cdots\wedge e_n}{f_1\wedge\cdots\wedge f_n}$ 大于 0.

同向关系是等价关系, 其等价类称为 V 的**方向**. 显然 V 只有两个方向,$e_1,\cdots,e_n$ 的方向记为 $[e_1,\cdots,e_n]$.

注记. 若 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 和 $\{f_1,\cdots,f_n\}$ 是 V 两组基, 对偶基为 $\{\check{e^1},\cdots,\check{e^n}\},\{\check{f^1},\cdots,\check{f^n}\}$. 令 $(e_1,\cdots,e_n)=(f_1,\cdots,f_n)A$ 则 $(\check{f^1},\cdots,\check{f^n})=(\check{e^1},\cdots,\check{e^n})A^{\mathrm{T}}$, 由 $\det A=\det A^{\mathrm{T}}$ 进而可知:

命题 4.11.11. $\dfrac{e_1\wedge\cdots\wedge e_n}{f_1\wedge\cdots\wedge f_n}=\dfrac{\check{f^1}\wedge\cdots\wedge\check{f^n}}{\check{e^1}\wedge\cdots\wedge\check{e^n}}$. 特别地,$\{e_1,\cdots,e_n\}$ 和 $\{f_1,\cdots,f_n\}$ 同向 $\iff$ $\{\check{e^1},\cdots\check{e^n}\}$ 和 $\{\check{f^1},\cdots\check{f^n}\}$ 同向. 因此 V 的方向和 V^* 的方向有自然的一一对应.

定义 4.11.12. 令 M 为 ∂-流形. 令 $\Lambda^kT^*M=\bigsqcup_{p\in M}\Lambda^kT_p^*M$, 一个 k-阶协变张量场 ω 称为**k-形式 (k-form)**, 若 ω 取值在 Λ^kT^*M 中, 即 $\forall p\in M$ 有 $\omega|_p\in\Lambda^kT_p^*M$. 若 (U,φ) 是 M 的坐标卡, 则 $\omega|_U$ 可写成

$$\sum_{i_1<\cdots<i_k}\omega_{i_1\cdots i_k}d\varphi^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\varphi^{i_k},\omega_{i_1\cdots i_k}:U\to\mathbb{R}$$

若 (V,ψ) 也是坐标卡, 则在 $U\cap V$ 上 ω 可写成

$$\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_k\\ j_1,\cdots,j_k}}\omega_{i_1\cdots i_k}\frac{\partial\varphi^{i_1}}{\partial\psi^{j_1}}\cdots\frac{\partial\varphi^{i_k}}{\partial\psi^{j_k}}d\psi^{j_1}\wedge\cdots\wedge d\psi^{j_k}$$

若 $F:M\to U$ 光滑,$(U,\varphi),(V,\psi)$ 是 M,N 坐标卡,$F(U)\subset V$,ω 是 V 是 k-形式, 且

$$\omega=\sum_{j_1<\cdots<j_k}\omega_{j_1\cdots j_k}d\psi^{j_1}\wedge\cdots\wedge d\psi^{j_k}$$

则

$$F^*\omega=\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_k\\ j_1<\cdots<j_k}}\omega_{j_1\cdots j_k}\circ F\cdot\frac{\partial\psi^{j_1}\circ F}{\partial\varphi^{i_1}}\cdots\frac{\partial\psi^{j_k}\circ F}{\partial\varphi^{i_k}}\cdot d\varphi^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\varphi^{i_k}$$

定义 4.11.13. 若 $\omega^1,\cdots,\omega^m$ 是 ∂-流形 M 上的 $k_1,\cdots,k_m$-形式, 则定义$\boldsymbol{\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^m}$ 为 $(k_1+\cdots+k_m)$ 形式, 满足 $\forall p\in M,\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^m|_p=\omega^1|_p\wedge\cdots\wedge\omega^m|_p$.

例子. 在 $\mathbb{R}^n$ 上,

$$\begin{aligned}(fdx^1\wedge dx^3+gdx^2\wedge dx^4)\wedge(hdx^2\wedge dx^5)&=fh\cdot dx^1\wedge dx^3\wedge dx^2\wedge dx^5\\&=-fhdx^1\wedge dx^2\wedge dx^3\wedge dx^5\end{aligned}$$

4.12 定向流形和第二型积分

定义 4.12.1. 令 M 为 ∂-流形. 若 (U,φ) 和 (V,ψ) 是坐标卡, 我们说它们是**同向**的, 若 $J(\psi\circ\varphi^{-1})=\det\mathrm{Jac}(\psi\circ\varphi^{-1})$ 在 $\varphi(U\cap V)$ 上处处大于 0.

命题 4.12.2. *对坐标卡 $(U,\varphi^1,\cdots,\varphi^n)$ 和 $(V,\psi^1,\cdots,\psi^n)$ 以下等价:*

(1) (U,φ) 和 (V,ψ) 同向

(2) 在 $U\cap V$ 上 $\dfrac{d\varphi^1\wedge\cdots\wedge d\varphi^n}{d\psi^1\wedge\cdots\wedge d\psi^n}$ 处处大于 0

(3) 在 $U\cap V$ 上 $\dfrac{\partial}{\partial\varphi^1}\wedge\cdots\wedge\dfrac{\partial}{\partial\varphi^n}\Big/\dfrac{\partial}{\partial\psi^1}\wedge\cdots\wedge\dfrac{\partial}{\partial\psi^n}>0$

证明: **(2) $\Longleftrightarrow$ (3) :** $\dfrac{d\varphi^1\wedge\cdots\wedge d\varphi^n}{d\psi^1\wedge\cdots\wedge d\psi^n}=\dfrac{\frac{\partial}{\partial\varphi^1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial\varphi^n}}{\frac{\partial}{\partial\psi^1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial\psi^n}}>0.$

(1) $\Longleftrightarrow$ (2) : $\forall p\in U\cap V$, 由 $\begin{pmatrix}d\psi^1\\\vdots\\d\psi^n\end{pmatrix}_p=\mathrm{Jac}\left(\psi\circ\varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)}\begin{pmatrix}d\varphi^1\\\vdots\\d\varphi^n\end{pmatrix}_p$ 知

$$\left.\frac{d\psi^1\wedge\cdots\wedge d\psi^n}{d\varphi^1\wedge\cdots\wedge d\varphi^n}\right|_p=\det\mathrm{Jac}\left(\psi\circ\varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)}$$

□

定义 4.12.3. 若 M 上有图册 $\mathcal{U}=\{(u_\alpha,\varphi_\alpha)\}$, 其中任意两个坐标卡之间同向 (注意不相交的坐标卡自动同向) 则把 $\mathcal{U}$ 称为**定向图册**. 两个定向坐标卡 $\mathcal{U},\mathcal{V}$ 称为**同向**, 若 $\mathcal{U},\mathcal{V}$ 之间成员两两同向 (等价地,$\mathcal{U}\cup\mathcal{V}$ 是定向图册).M 的**方向**指定向图册所在的同向等价类 (等价地, 指 M 的一个极大定向图册). M 和一个方向一起被称为**定向∂-流形 (oriented∂-manifold)**. 其极大定向图册中的一个坐标卡 (U,φ) 称为**保向坐标卡 (orientation-preserving chart)**. 若不加说明, 定向 ∂-流形的坐标卡指保向坐标卡.

注记. 若 M 是定向 ∂-流形, 则 $\forall p\in M, T_p^*M$ 和 T_pM 都有对应的方向: 取 (保向) 坐标卡 (U,φ) 包含 p, 则 $[d\varphi^1|_p,\cdots,d\varphi^n|_p]$ 和 $\left[\left.\frac{\partial}{\partial\varphi^1}\right|_p,\cdots,\left.\frac{\partial}{\partial\varphi^n}\right|_p\right]$ 给出了方向, 且这与坐标卡的选取无关. 因此, 我们能用 TM 中一组基来直观理解 M 的方向, 我们也能用一个 n 阶协变张量场 $\omega: M\to\Lambda^nT^*M$ 或 n 阶**反变张量场** $\xi: M\to\Lambda^nT^*M$ 描述, 这里,$\forall p\in M$, 若 (U,φ) 是保向坐标卡且包含 p, 则 $\left.\frac{\omega}{d\varphi^1\wedge\cdots\wedge d\varphi^n}\right|_p>0, \left.\frac{\xi}{\frac{\partial}{\partial\varphi^1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial\varphi^n}}\right|_p>0$, 我们归纳如下:

命题 4.12.4. *令 M 是 n 维 ∂-流形, 则 M 的一个方向是一个 M 的 n-形式 $\omega: M\to\Lambda^nT^*M$ 所在等价类, 这里 ω 要求满足: 存在 M 的图册 $\mathfrak{U}$ 使 $\forall(U,\varphi)\in\mathfrak{U}$ 有 $\left.\frac{\omega}{d\varphi^1\wedge\cdots\wedge d\varphi^n}\right|_U>0$.$\omega$ 和 ω' 等价 $\iff \frac{\omega}{\omega'}>0$. 把 ω 换成 n 阶反变张量场,$d\varphi^1\wedge\cdots\wedge d\varphi^n$ 换成 $\frac{\partial}{\partial\varphi^1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial\varphi^n}$ 则结论也成立.*

命题 4.12.5. *令 M 为 n 维 ∂-流形.ω_1,ω_2 为 M 上两个 n-形式且给出了 M 上的两个方向 O_1 和 O_2. 令 $U=\left\{\left.\frac{\omega_1}{\omega_2}\right|_p>0\right\}$, 则 U 是 M 的开和闭子集. 特别地, 若 M 连通, 则 ω_1,ω_2 要么处处同向, 要么处处反向. 因此连通 ∂-流形只有最多两个方向.*

证明: $\forall p\in U$, 我们证 p 是 U 内点. 由前一命题, 存在包含 p 的坐标卡 (V,φ) 使 $\left.\frac{\omega_1}{d\varphi^1\wedge\cdots\wedge d\varphi^n}\right|_V>0$. 通过缩小 V, 有坐标卡 (V,ψ) 使 $\left.\frac{\omega_2}{d\psi^1\wedge\cdots\wedge d\psi^n}\right|_V>0$ 且 V 连通. 而

$$\frac{d\psi^1\wedge\cdots\wedge d\psi^n}{d\varphi^1\wedge\cdots\wedge d\varphi^n}=\det\left(\mathrm{Jac}\left(\psi\circ\varphi^{-1}\right)\right)\circ\varphi$$

是 V 上连续函数, 要么恒正要么恒负. 故由 $\left.\frac{\omega_1}{\omega_2}\right|_p>0$ 知 $\left.\frac{\omega_1}{\omega_2}\right|_V>0$. 故 $V\subset U$. 类似地,$M\setminus U=\left\{p\in M:\left.\frac{\omega_1}{\omega_2}\right|_p<0\right\}$ 也是开集. $\square$

例子. *Möbius 带 $M=U\cup V,U\cong V\cong(0,1)^2,U\cap V$ 有两个连通分支, 取 U,V 上方向 ω_1,ω_2, 则 $\left.\frac{\omega_1}{\omega_2}\right|_{\omega_1}$ 与 $\left.\frac{\omega_1}{\omega_2}\right|_{\omega_2}$ 反号. 不妨令 $\left.\frac{\omega_1}{\omega_2}\right|_{\omega_1}>0,\left.\frac{\omega_1}{\omega_2}\right|_{\omega_2}<0$. 若 M 上有方向 ω, 因 U,V 连通,$\left.\frac{\omega}{\omega_1}\right|_U$ 处处同号, 故 $\left.\frac{\omega}{\omega_1}\right|_{\omega_1\cup\omega_2}$ 处处同号. 类似地, $\left.\frac{\omega}{\omega_2}\right|_{\omega_1\cup\omega_2}$ 处处同号, 这与假设矛盾. 故 M 不可定向.*

定义 4.12.6. 令 M 为 n 维定向 ∂-流形,ω 是 M 上的 n-形式. 我们说$\boldsymbol{\omega\geqslant 0}$, 若 $\forall p\in M,\forall T_p^*M$ 上的方向 $[\alpha_1,\cdots,\alpha_n]$, 有 $\frac{\omega|_p}{\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_n}\geqslant 0$.

注记. 令 M 为 n 维定向 ∂-流形,ω 是 n-形式.$\mathfrak{U}$ 是 M 的一个保向图册, 则 $\forall(U,\varphi^1,\cdots,\varphi^n)\in\mathfrak{U}$ 有 $\omega|_U=f_Ud\varphi^1\wedge\cdots\wedge d\varphi^n$, 这里 $f_U: U\to\mathbb{R}$, 则不难看出:

- $\omega\geqslant 0\iff\forall U, f_U\geqslant 0$
- ω 是 Borel 的 $\iff\forall U, f_U$ 是 Borel 的

- ω 是 C^r 的 $\iff \forall U, f_U$ 是 C^r 的

且 $\omega = \omega^+ - \omega^-, \omega^+, \omega^- \geqslant 0, \forall U$ 有

$$\omega^+|_U = f_U^+ d\varphi^1 \wedge \cdots \wedge d\varphi^n, \omega^-|_U = f_U^- d\varphi^1 \wedge \cdots \wedge d\varphi^n$$

且 ω 是 Borel/C^r 的 $\iff \omega^+, \omega^-$ 是 Borel/C^r 的.

定义 4.12.7. 令 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 开子集, 给予**标准方向**, 即标准坐标 $x^1, \cdots x^n$ 定义的方向, 亦即 $[dx^1, \cdots dx^n]$, 或 $[\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}]$ 定义的方向. 令 Ω 上 n-形式 $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, f : \Omega \to \mathbb{R}$ 是 Borel 的, 则

$$\int_\Omega f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \int_\Omega f dm$$

即 $\displaystyle\int_\Omega \omega = \int_\Omega \frac{\omega}{dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n} dm.$

定义 4.12.8. 令 ω 为 n 维定向流形的 Borel$n$-形式且 $\omega \geqslant 0$. 若 $\{p \in M : \omega_p \neq 0\}$ 被包含在一个保向坐标卡 (U, φ) 内, 则定义 $\displaystyle\int_M \omega = \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega.$

注记. 记 $\omega = f d\varphi^1 \wedge \cdots \wedge f d\varphi^n$, 则 $(\varphi^{-1})^* \omega = f \circ \varphi^{-1} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, 从而

$$\int_M \omega = \int_{\varphi(U)} \left(f \circ \varphi^{-1}\right) dm = \int_{\varphi(U)} \frac{\omega}{d\varphi^1 \wedge \cdots \wedge d\varphi^n} \circ \varphi^{-1} dm$$

引理 4.12.9. *以上定义不依赖于 (U, φ) 的选取.*

证明: 令 (V, ψ) 包含 $\{p \in M : \omega_p \neq 0\}$, 通过把 U, V 换成 $U \cap V$, 不妨假设 $U = V$. 令 $F = \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U) \to \varphi(U)$. 由 $\mathbb{R}^n$ 积分换元公式:

$$\int_{\varphi(U)} \frac{\omega}{d\varphi^1 \wedge \cdots \wedge d\varphi^n} \circ \varphi^{-1} dm = \int_{\psi(U)} \frac{\omega}{d\varphi^1 \wedge \cdots \wedge d\varphi^n} \circ \psi^{-1} \cdot J(F) dm \qquad (*)$$

由 $\begin{pmatrix} d\varphi^1 \\ \vdots \\ d\varphi^n \end{pmatrix} = (\mathrm{Jac}(F)) \circ \psi \cdot \begin{pmatrix} d\psi^1 \\ \vdots \\ d\psi^n \end{pmatrix}$ 得 $J(F) \circ \psi = \dfrac{d\varphi^1 \wedge \cdots \wedge d\varphi^n}{d\psi^1 \wedge \cdots \wedge d\psi^n}$. 故

$$\begin{aligned}(*) &= \int_{\psi(U)} \left(\frac{\omega}{d\varphi^1 \wedge \cdots \wedge d\varphi^n} \circ \psi^{-1}\right) \left(\frac{d\varphi^1 \wedge \cdots \wedge d\varphi^n}{d\psi^1 \wedge \cdots \wedge d\psi^n} \circ \psi^{-1}\right) dm \\ &= \int_{\psi(U)} \left(\frac{\omega}{d\psi^1 \wedge \cdots \wedge d\psi^n} \circ \psi^{-1}\right) dm\end{aligned}$$

□

定义 4.12.10. 令 ω 为 n 维定向流形 M 的 Borel$n$-形式. 若 $\omega \geqslant 0$, 定义 $\displaystyle\int_M \omega = \sum_{i=1}^\infty \int_M \omega \cdot \chi_{E_i}$, 这里 $M = \displaystyle\bigsqcup_{i=1}^\infty E_i$,$E_i$ 是 Borel 集且被包含在某个 (保向) 坐标卡内. 类似于第一型积分, 易知此定义与 $E_1, E_2, \cdots$ 的选取无关. 一般地, 我们记 $|\omega| = \omega^+ + \omega^-$, 若 $\displaystyle\int_M |\omega| < +\infty$, 则令 $\displaystyle\int_M \omega = \int_M \omega^+ - \int_M \omega^-$. 若 M 带边, 则 $\displaystyle\int_M \omega$ 定义为 $\displaystyle\int_{\mathrm{Int}\, M} \omega$.

命题 4.12.11. 令 M 为 n 维定向 ∂-流形,ω 是连续 n-形式且有紧支集, 则 $\int_M |\omega| < +\infty$.

证明: 对 $\operatorname{supp}\omega = \overline{\{p \in M : \omega_p \neq 0\}}$, 取 M 内有限开覆盖 $\mathfrak{U}$, 每个是 M 的坐标卡. 利用 $\operatorname{supp}\omega$ 在 $\mathfrak{U}$ 下的单位分解, 化为 $\operatorname{supp}\omega \subset U, (U,\varphi)$ 是坐标卡的情形. 易证此时 $\int_U |\omega| < +\infty$. □

定义 4.12.12. 若 M, N 为 n 维定向 ∂-流形, 微分同胚 $F : M \to N$ 称为**保向**的, 若如下等价条件之一成立:

(1) 对任意 N 的 (保向) 坐标卡 (V,ψ), 有 $(F^{-1}(V), \psi \circ F)$ 是 M 的 (保向) 坐标卡.

(2) $\forall p \in M$, 令 $q = F(p)$, 若 $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$ 给出 T_q^*N 的方向, 则 $F^*\alpha_1 \wedge \cdots \wedge F^*\alpha_n$ 给出 T_p^*M 的方向.

(3) $\forall p \in M$, 令 $q = F(p)$, 若 $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ 是 T_pM 的方向, 则 $dF \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge dF \cdot v_n$ 给出 T_qN 的方向.

(4) $\forall$ 开集 $V \subset N$,$\forall V$ 上 C^∞ 的 n-形式 ω, 若 $\omega \geqslant 0$, 则 $F^*\omega \geqslant 0$.

我们留给大家自己思考等价性.

命题 4.12.13. 令 M, N 为 n 维定向 ∂-流形,$F : M \to N$ 是保向微分同胚,ω 是 N 上的 *Boreln*-形式, 则 $\int_N |\omega| = \int_M F^*|\omega|$. 且若此式 $< +\infty$, 则 $\int_N \omega = \int_M F^*\omega$.

证明: 由线性性, 不妨假设 $\omega \geqslant 0$, 不妨假设 $\{p \in N : \omega_p \neq 0\}$ 被包含在 N 某个坐标卡 (V,ψ) 内. 则 $\int_N \omega = \int_{\psi(V)} (\psi^{-1})^*\omega$. 令 $U = F^{-1}(V), \varphi = \psi \circ F$, 则 (U,φ) 是 M 坐标卡且包含 $F^*\omega$ 非零点. 故

$$\int_M F^*\omega = \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* F^*\omega = \int_{\psi(V)} (\psi^{-1})^*\omega$$

□

例子. 令 Ω 是 $\mathbb{R}^m$ 开子集,$F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 是 C^∞ 嵌入.Ω 上的方向是**标准方向**, 给予 $M = F(\Omega)$ 方向使 $F : \Omega \to M$ 保向. 令 $\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant n} \omega_{i_1 \cdots i_m} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m}$ 为 M 一个邻域 V 上的有紧支集的连续 m-形式. 计算 $\int_M \omega$, 准确来说, 令 $\iota : M \to \mathbb{R}^n, p \mapsto p$, 计算 $\int_M \iota^*\omega$.

证明: $\int_M \omega = \int_M \iota^*\omega = \int_\Omega F^*\iota^*\omega = \int_\Omega F^*\omega$. 而

$$\begin{aligned}
F^*\omega &= \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant n \\ 1 \leqslant j_1 < \cdots < j_m \leqslant m}} (\omega_{i_1 \cdots i_m} \circ F) \partial_{j_1} F^{i_1} \cdots \partial_{j_m} F^{i_m} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_m} \\
&= \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant n} (\omega_{i_1 \cdots i_m} \circ F) \cdot \det((\operatorname{Jac} F)_{\substack{i_1, \cdots, i_m \text{行} \\ 1, \cdots, m \text{列}}}) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m
\end{aligned}$$

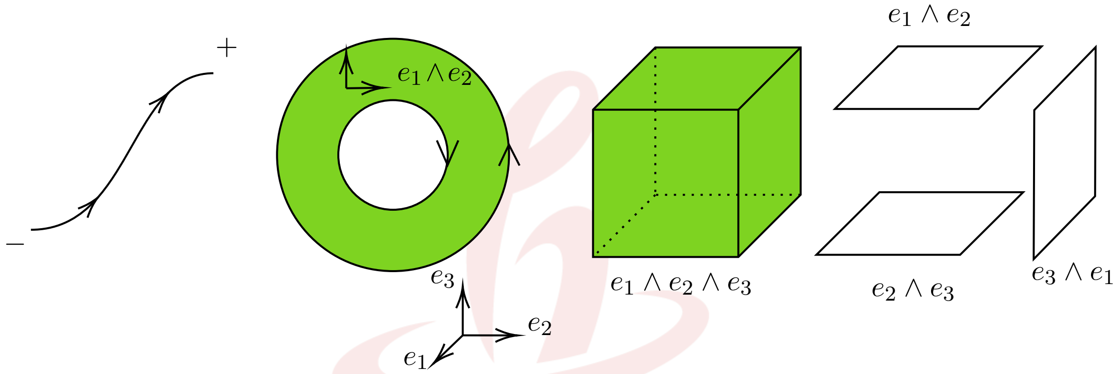
故 $\int_M \omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant n} \int_\Omega (\omega_{i_1 \cdots i_m} \circ F) \cdot \det((\operatorname{Jac} F)_{\substack{i_1, \cdots, i_m \text{行} \\ 1, \cdots, m \text{列}}}) dm.$ □

在一些具体问题中,M 作为 $\mathbb{R}^n$ 子流形出现, 其方向由 $\mathbb{R}^n$ 中指向 M 一侧的某个向量表示. 例如 $\mathbb{R}^3$ 球面的 “向外” 和 “向内”, 我们来理解其含义.

定义 4.12.14. 令 N 是 n 维定向流形,M 是**连通**的 $n-1$ 维子流形. 令 $p\in M$, 令 $\xi\in T_pN\setminus T_pM$.(回忆若 $\iota: M\to N$ 是嵌入, 我们把 T_pM 和 $d\iota(T_pM)$ 等同从而看作 T_pM 子空间) 取 M 上的方向, 由 $n-1$ 阶反变张量 $\eta: M\to\Lambda^{n-1}T_pM$ 给出, 且 $\xi\wedge\eta\in\Lambda^nT_pM$ 与 N 在 p 处的方向同向, 则称 η 为**ξ 给出的M 的方向**.

注记. 对于 N 是 ∂-流形,$M=\partial N$ 的情况我们也作此定义. 我们规定 $TN|_{\partial N}$ 指向 M 的**外部**的方向给出的 ∂N 的方向为 ∂N 的标准方向. 因此, 若 (U,φ) 是 N 的保向坐标卡,$\varphi(U)$ 是 $\widetilde{\mathbb{H}^n}=\{(x_1,\cdots,x_n): x_1\geqslant 0\}$ 的开子集 (给予标准方向 $\dfrac{\partial}{\partial x^1}\wedge\cdots\wedge\dfrac{\partial}{\partial x^n}$), 则 $U\cap\partial N$ 上的方向由 $-\dfrac{\partial}{\partial x^2}\wedge\cdots\wedge\dfrac{\partial}{\partial x^n}$ 或等价地 $dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n$ 给出 (我们留给大家验证这是良定义的). 等价地, 若 $\varphi(U)$ 是 $\mathbb{H}^n$ 开子集, 则 $U\cap\partial V$ 上方向由 $(-1)^n\dfrac{\partial}{\partial x^1}\wedge\cdots\wedge\dfrac{\partial}{\partial x^{n-1}}$ 或等价地 $(-1)^n dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{n-1}$ 给出.

由此可知:$\varphi(U)$ 是 $\widetilde{\mathbb{H}^n}$ 开子集 $\implies$ $(\varphi^2,\cdots,\varphi^n)|_{U\cap\partial N}$ 给出 ∂N 的反向坐标卡.$\varphi(U)$ 是 $\mathbb{H}^n$ 开子集 $\implies$ $(\varphi^1,\cdots,\varphi^{n-1})|_{U\cap\partial N}$ 给出 ∂N 的改变 $n-1$ 次方向后的坐标卡.



例子.

例子. 令 Ω 为 $\mathbb{R}^{n-1}$ 连通子集,$F:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 为 C^∞ 的嵌入映射,$v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 指向 $F(\Omega)$ 一侧.(特别地, 假设 v 不与 $F(\Omega)$ 任一切空间平行)$F(\Omega)$ 的方向由 v 给出.

令 ω 为定义在 $F(\Omega)$ 某邻域上的 $\mathbb{R}^n$ 的 Borel$(n-1)$-形式 (必然形如 $f_1dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n+f_2dx^1\wedge dx^3\wedge\cdots\wedge dx^n+\cdots+f_ndx^1\wedge\cdots\wedge dx^{n-1}$) 记 $F^*\omega=fdx^1\wedge\cdots\wedge dx^{n-1}$. 若 $\det(v,\mathrm{Jac})$ 处处大于 0, 则 $\nu\wedge dF\dfrac{\partial}{\partial x^1}\wedge\cdots\wedge dF\dfrac{\partial}{\partial x^{n-1}}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中标准方向. 故 $\displaystyle\int_{F(\Omega)}\omega=\int_\Omega fdm$. 若 $\det(v,\mathrm{Jac}\,F)$ 处处小于 0, 则 $\displaystyle\int_{F(\Omega)}\omega=-\int_\Omega fdm$.

例子. 令 $M=\{x^2+y^2+z^2=1\},\Omega=\{x^2+y^2<1\}.M$ 的方向向外. 则

$$(x,y)\in\Omega\mapsto\sqrt{1-x^2-y^2}\in M\cap\mathbb{H}^3$$

是正向的.

$$(x,y)\in\Omega\mapsto-\sqrt{1-x^2-y^2}\in M\cap(-\mathbb{H}^3)$$

是负向的. 这直接通过几何观察可知, 无需计算 $\det(v,\mathrm{Jac})$ 正负性.

我们接下来讨论第一型和第二型积分的关系. 首先, 若 n 维 $\mathbb{R}$-线性空间 V 有 (实) 内积, 则有线性同构 $\Phi: V\to V^*, v\mapsto\langle\cdot,v\rangle$. 因此我们能够给 V^* 引入唯一内积使 Φ 保内积. 若 $e_1,\cdots e_n$ 是 V 一组标准正交基, 则对偶基 $\check{e^1},\cdots,\check{e^n}$ 是 V^* 标准正交基.

由正交变换 det 值为 ± 1 可知: 若 V 有同向的两组标准正交基 $\{e_1,\cdots,e_n\},\{f_1,\cdots,f_n\}$ 则 $e_1\wedge\cdots\wedge e_n=f_1\wedge\cdots\wedge f_n$, 称其为 V 的 (由内积决定的) **体积张量**.V 有两个体积张量, 和 V 的两个方向对应.

命题 4.12.15. *令 (M,g) 为 n 维定向 ∂-Riemann 流形. 定义 n 形式 ω_g 如下:$\forall p\in M,\omega_g|_p=\check{e^1}\wedge\cdots\wedge\check{e^n}$, 这里 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 T_pM 一组与方向一致的 (内积 g 下) 标准正交基, 其对偶基为 $\{\check{e^1},\cdots\check{e^n}\}$. 即 $\omega_g|_p$ 是 T_p^*M 的与方向吻合的体积张量. 则 ω_g 是光滑的 n-形式, 称为 (M,g) 的***体积形式*.

证明: 任意 (保向) 坐标卡 (U,φ), 则

$$g|_U=\left(d\varphi^1,\cdots,d\varphi^n\right)G\begin{pmatrix}d\varphi^1\\ \vdots\\ d\varphi^n\end{pmatrix}$$

G 正定, 则 $\forall p\in U,\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=(\sqrt{G})_p\cdot\begin{pmatrix}d\varphi^1\\ \vdots\\ d\varphi^n\end{pmatrix}_p$ 是 T_p^*M 的与方向吻合的标准正交基. 则 $\omega_g|_p=\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_n=\det\sqrt{G}_p d\varphi^1\wedge\cdots\wedge d\varphi^n\Big|_p$, 故

$$\omega_g|_U=\sqrt{\det G}d\varphi^1\wedge\cdots\wedge d\varphi^n$$

$\sqrt{\det G}$ 光滑. □

在以上证明中, 若 $f:U\to\mathbb{R}$ 是 Borel 函数, 则我们知道 $\int_U fdV_g=\int_{\varphi(U)}(f\circ\varphi^{-1})\cdot\sqrt{\det G}\circ\varphi^{-1}dm$, 而

$$\begin{aligned}\int_U f\omega_g&=\int_U f\sqrt{\det G}d\varphi^1\wedge\cdots\wedge d\varphi^n\\&=\int_{\varphi(U)}(f\circ\varphi^{-1})\cdot\sqrt{\det G}\circ\varphi^{-1}dm=\int_U fdV_g\end{aligned}$$

故得:

命题 4.12.16. *令 (M,g) 为 n 维定向 ∂-Riemann 流形,$f:M\to\mathbb{R}$ 是 Borel 函数, 则 $\int_M|f|dV_g=\int_M|f|d\omega_g$. 若此式 $<+\infty$, 则 $\int_M fdV_g=\int_M f\omega_g$.*

注记. 反过来, 对 M 上 Boreln-形式 ν 有 $\int_M\nu=\int_M\frac{\nu}{\omega_g}dV_g$. 故第一型与第二型积分可互相转化.

例子. *令 $F:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 为流形嵌入,Ω 是 $\mathbb{R}^m$ 开子集.$M=F(\Omega)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的 Riemann 子流形, 取 Ω 上度量 g 使 $F:\Omega\to M$ 是等距的, 则*

$$g=(dx^1,\cdots,dx^m)(\mathrm{Jac}\,F)^{\mathrm{T}}(\mathrm{Jac}\,F)\begin{pmatrix}dx^1\\ \vdots\\ dx^m\end{pmatrix}$$

则 $\omega_g=\sqrt{\det(\mathrm{Jac}\,F)^{\mathrm{T}}\,\mathrm{Jac}\,F}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$.

4.13 外微分和 Stokes 公式

Faraday 定律告诉我们, 对电场 $\vec{E}=(E_1,E_2,E_3)$ 和磁场 $\vec{B}=(B_1,B_2,B_3)$ 有 $\displaystyle\int_{\partial M}\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\frac{d}{dt}\int_M \vec{B}\cdot d\vec{S}$.$M$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中可定向紧 ∂-曲面, 其含义如下: 将 $\vec{E},\vec{B}$ 看作 1-形式 $\mathcal{E}=E_1dx+E_2dy+E_3dz,\beta=B_1dx+B_2dy+B_3dz$, 定义 **Hodge$*$ 算子**,$*$ 为线性映射, 满足

$$*dx=dy\wedge dz,*dy=dz\wedge dx,*dz=dx\wedge dy$$

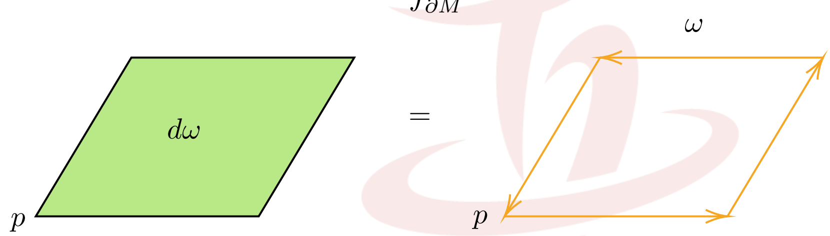
从而 $*\beta=B_1dy\wedge dz-B_2dx\wedge dz+B_3dx\wedge dy$, 则 $\displaystyle\int_{\partial M}\mathcal{E}=-\frac{d}{dt}\int_M *\beta$.

我们将看到对一般 n 维可定向紧 ∂-流形 M, 以及 C^1 的 $(n-1)$-形式 ω, 存在一个 n 形式 $d\omega$ 满足 "电场 ω 由某个磁场的负变化率 $d\omega$ 生成", 即 $\displaystyle\int_{\partial M}\omega=\int_M d\omega$(Stokes 公式)

如果 ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 $(k-1)$-形式,$p\in\mathbb{R}^n,v_1,\cdots,v_k\in\mathbb{R}^n$ 线性无关. 令 M 为以 p 为起点,$v_1,\cdots,v_k$ 张成的平行多面体

$$M=p+\{t_1v_1+\cdots+t_kv_k:0\leqslant t_1,\cdots,t_k\leqslant 1\}$$

则当 $v_1,\cdots,v_k$ 很小时,$\displaystyle d\omega_p(v_1\otimes\cdots\otimes v_k)\approx\int_M d\omega$. 因此, 不严格地来说,$d\omega$ 在 $p\in\mathbb{R}^n$ 处的取值 "定义" 为 $\displaystyle d\omega|_p(v_1\otimes\cdots\otimes v_k)\approx\int_{\partial M}\omega$.



下面我们给出严格定义:

定义 4.13.1. 令 M 为 ∂-流形,$(U,\varphi^1,\cdots,\varphi^n)$ 为坐标卡,ω 是 U 上 C^1 的 k-形式, 则 ω 能唯一地写成

$$\omega=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\omega_{i_1\cdots i_k}\wedge d\varphi^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\varphi^{i_k},\omega_{i_1\cdots i_k}\in C^1(U,\mathbb{R})$$

定义 ω 关于坐标卡 (U,φ) 的**外微分 (exterior derivative)** 为

$$d\omega=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}d\omega_{i_1\cdots i_k}\wedge d\varphi^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\varphi^{i_k}$$

显然若 η 也是 U 上 C^1 的 k-形式, 则 $d(\omega+\eta)=d\omega+d\eta$.

引理 4.13.2. 若 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$, 则 $d\left(fd\varphi^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\varphi^{i_k}\right)=df\wedge d\varphi^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\varphi^{i_k}$.

证明: $i_1,\cdots,i_k$ 有重复时两边 $=0$. 若无重复, 把顺序换成从小到大, 做计算, 再换成原顺序即可. $\square$

命题 4.13.3. 令 ω,η 为 C^1 的 k-形式和 l-形式, 则 $d(\omega\wedge\eta)=d\omega\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge d\eta$.

证明: 由线性性, 不妨假设 $\omega=fd\varphi^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\varphi^{i_k},\eta=gd\varphi^{j_1}\wedge\cdots\wedge d\varphi^{j_l}$. 记 $\alpha=d\varphi^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\varphi^{i_k},\beta=d\varphi^{j_1}\wedge\cdots\wedge d\varphi^{j_l}$. 则

$$\begin{aligned}d(\omega\wedge\eta)&=d(fg\cdot\alpha\wedge\beta)=d(fg)\wedge\alpha\wedge\beta\\&=(gdf+fdg)\wedge\alpha\wedge\beta=(df\wedge\alpha)\wedge(g\beta)+(-1)^kf\alpha\wedge(dg\wedge\beta)\\&=d\omega\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge d\eta\end{aligned}$$

□

命题 4.13.4. $d(d\omega)=0$.

证明: 不妨令 $\omega=fd\varphi^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\varphi^{i_k}$. 简单起见, 令 $\omega=fd\varphi^1\wedge\cdots\wedge d\varphi^k$, 则

$$\begin{aligned}d\omega&=df\wedge d\varphi^1\wedge\cdots\wedge d\varphi^k\\&=\sum_{i=k+1}^{n}\frac{\partial f}{\partial\varphi^i}d\varphi^i\wedge d\varphi^1\wedge\cdots\wedge d\varphi^k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d^2\omega&=\sum_{j\neq1,\cdots,k,i}\sum_{i>k}\frac{\partial}{\partial\varphi^j}\frac{\partial f}{\partial\varphi^i}d\varphi^j\wedge d\varphi^i\wedge d\varphi^1\wedge\cdots\wedge d\varphi^k\\&=\sum_{j>k}\sum_{i>k}\frac{\partial}{\partial\varphi^j}\frac{\partial}{\partial\varphi^i}fd\varphi^j\wedge d\varphi^i\wedge d\varphi^1\wedge\cdots\wedge d\varphi^k\end{aligned}$$

注意 $\dfrac{\partial}{\partial\varphi^j}\dfrac{\partial}{\partial\varphi^i}f=\dfrac{\partial}{\partial\varphi^i}\dfrac{\partial}{\partial\varphi^j}f$, 因为 $(\partial_j\partial_i(f\circ\varphi^{-1}))\circ\varphi=(\partial_i\partial_j(f\circ\varphi^{-1}))\circ\varphi$, 故

$$d^2\omega=\sum_{i,i>k}\frac{\partial}{\partial\varphi^i}\frac{\partial}{\partial\varphi^j}fd\varphi^j\wedge d\varphi^i\wedge\cdots\wedge d\varphi^1\wedge\cdots\wedge d\varphi^k=-d^2\omega$$

故 $d^2\omega=0$. □

命题 4.13.5. 令 $F:M\to N$ 为 ∂-流形的 C^∞ 映射,M,N 上分别有坐标卡 $(M,\varphi^1,\cdots,\varphi^m)$ 以及 $(N,\psi^1,\cdots,\psi^n)$. 令 ω 为 N 上 C^1 的 k-形式. 则 $F^*(d\omega)=d(F^*\omega)$.

证明: 对 k 用归纳法.$k=0$ 时显然. 假设对某个 $k\in\mathbb{N}$ 成立. 我们证 ω 是 $(k+1)$-形式的情形. 由线性性, 不妨假设 $\omega=\eta\wedge d\varphi^i$,$\eta$ 是 N 上的 C^1 的 k-形式, 则

$$\begin{aligned}F^*d(\eta\wedge d\varphi^i)&=F^*(d\eta\wedge d\varphi^i+(-1)^k\eta\wedge d^2\varphi^i)\\&=F^*(d\eta\wedge d\varphi^i)=(F^*d\eta)\wedge F^*(d\varphi^i)\end{aligned}$$

由情形 k 知 $F^*d\eta=dF^*\eta$. 而由 F^* 定义,$F^*d\varphi^i=d(\varphi^i\circ F)=d(F^*\varphi^i)$. 故 $F^*d(\eta\wedge d\varphi^i)=(dF^*\eta)\wedge(dF^*\varphi^i)$, 而

$$\begin{aligned}dF^*(\eta\wedge d\varphi^i)&=d(F^*\eta\wedge F^*d\varphi^i)=d(F^*\eta\wedge dF^*\varphi^i)\\&=dF^*\eta\wedge dF^*\varphi^i+(-1)^kF^*\eta\wedge d^2F^*\varphi^i\\&=dF^*\eta\wedge dF^*\varphi^i\end{aligned}$$

□

推论 4.13.6. 外微分的定义与坐标卡选取无关. 故任意 ∂-流形上的 C^1 微分形式都能定义外微分.

证明: 以上命题中取 $M=N, F=\mathrm{id}$. □

注记. 我们解释 $dF^*\omega=F^*d\omega$ 的几何意义:

注意 F 是 C^∞ 同胚时 $dF^*=F^*d$ 说的是 d 的定义只依赖于 C^∞ 同胚等价类. 现不假设 F 是 C^∞ 同胚, 令 $F:M\to N$ 为 ∂-流形的 C^∞ 映射,M 是 m 为定向的. η 是 N 的 m-形式. 把 $F(M)$ 看作 N 中的 m 维 (广义) 参数化定向流形 (其方向由 M 而非 N 给出)(例:$M=(a,b)$, 则 $F(M)$ 是 N 中参数化曲线, 可自相交) 定义

$$\int_{F(M)}\eta=\int_M F^*\eta \tag{$*$}$$

我们假设 Stokes 定理成立,ω 是 N 上的 C^1 的 $m-1$ 形式, 则 $\displaystyle\int_M dF^*\omega=\int_{\partial M}F^*\omega\overset{(*)}{=}\int_{F(\partial M)}\omega, \int_M F^*d\omega=\int_{F(M)}d\omega$. 定义 $\partial F(M)=F(\partial M)$, 则 $dF^*=F^*d$ 告诉我们 $\displaystyle\int_{F(M)}d\omega=\int_{\partial F(M)}\omega$, 即 Stokes 定理对一般的 (退化的或自相交的) 参数化流形成立.

定理 4.13.7 (Stokes 定理)**.** 令 M 为 n 维定向紧 ∂-流形,ω 是 M 上的 C^1 的 $(n-1)$-形式, 则 $\displaystyle\int_{\partial M}\omega=\int_M d\omega$.

注记. 把 M 紧换成 $\mathrm{supp}(\omega)$ 紧则结论也成立. 证明只需对 $\mathrm{supp}(\omega)$ 作在 M 中开覆盖的单位分解. 我们没证过这一结论, 故不证这一版本的 Stokes 定理.

证明: 由 M 上的 C^∞-单位分解,ω 是有限个 C^1 的 $(n-1)$-形式的和, 其中每个的支集在坐标卡中. 因此不妨假设 M 有坐标卡 $(U,\varphi),\varphi:U\to\widetilde{\mathbb{H}^n}=\{(x_1,\cdots,x_n):x_1\geqslant 0\}$ 是 C^∞ 嵌入. 且 $\mathrm{supp}(\omega)\subset U$, 因此通过把 M 换成 $\varphi(U)$, 不妨假设 M 是 $\widetilde{\mathbb{H}^n}$ 开子集. 通过扩大 M, 不妨假设 $M=[0,a)\times(-a,a)\times\cdots\times(-a,a)$, 则

$$\omega=\sum_{i=1}^n f_i dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n$$

这里 $f_i\in C_c^\infty(M,\mathbb{R})$. 由线性性, 不妨假设 $\omega=f\cdot dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n$, 则 $d\omega=df\wedge dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n=(-1)^{i-1}\partial_i f\cdot dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$, 则

$$\int_M d\omega=\int_{[0,a)\times(-a,a)^{n-1}}(-1)^{i-1}\partial_i f dx_1\cdots dx_n$$

当 $i>1$ 时,

$$\int_{-1}^a \partial_i f(x_1,\cdots,x_n)dx_i=f(x_1,\cdots,a,\cdots,x_n)-f(x_1,\cdots,-a,\cdots,x_n)=0-0=0$$

当 $i=1$ 时,

$$\int_0^a \partial_i f dx_1=f(a,x_2,\cdots,x_n)-f(0,x_2,\cdots,x_n)$$

故 $\int_M d\omega = -\delta_{i,1}\int_{(-a,a)^{n-1}} f(0,x_2,\cdots,x_n)dx_2\cdots dx_n$. 接下来我们计算 $\int_{\partial M}\omega$. 回忆 $\partial M = \{0\}\times(-a,a)^{n-1}$ 上的方向由 $-\frac{\partial}{\partial x^2}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x^n}$ 给出. 令

$$\iota:(-a,a)^{n-1}\to M,(x_2,\cdots,x_n)\mapsto(0,x_2,\cdots,x_n)$$

则 ι 是对 ∂M 的反向的参数化. 故由 $\iota^*\omega = \delta_{i,1}f(0,x^2,\cdots,x_n)dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n$ 知

$$\int_{\partial M}\omega = -\int_{(-a,a)^{n-1}}\delta_{i,1}f(0,x_2,\cdots,x_n)dx_2\cdots dx_n$$

□

注记. 在 Stokes 定理中可要求 M 比 ∂-流形更不光滑一些. 例如 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧长方体. 则可用 ∂-流形逼近 M,Stokes 定理也对这样的几何对象成立.

更一般地, 我们可以考虑 C^∞ 带角流形. 其局部 C^∞ 同胚于 $\mathbb{H}^n_k = \{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_1,\cdots,x_k\geqslant 0\}$.$\partial$-流形的许多性质都能用同样方法推广到带角流形. 对定向紧带角流形 M, 我们也能给 ∂M 予 "向外" 的方向, 从而 Stokes 定理也成立. 其证法有两种:(1) 模仿 ∂-流形 Stokes 定理证法, 化为 $\mathbb{H}^n_k$ 上的情形, 直接计算 $\int_{\partial\mathbb{H}^n_k}\omega$ 与 $\int_{\mathbb{H}^k_k} d\omega$ 并证明相同;(2) 化为 $\mathbb{H}^n_k$ 情形, 用 ∂ 流形序列 M_m 逼近 $\mathbb{H}^n_k$ 使

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\partial M_m}\omega = \int_{\partial M_m}\omega,\ \lim_{m\to\infty}\int_{M_m}d\omega = \int_{\mathbb{H}^n_k}d\omega$$

然后证明, 我们把细节留作思考.

推论 4.13.8 (梯度定理). *令 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 为 C^∞ 映射.f 是包含 $\gamma([a,b])$ 某开集 U 上的 C^∞ 函数, 则*

$$\begin{aligned} f\circ\gamma(b)-f\circ\gamma(a) &= \int_{\gamma([a,b])}\partial_1 f dx^1+\cdots+\partial_n f dx^n \\ &= \int_a^b(\partial_1 f(\gamma^1)'+\cdots+\partial_n f(\gamma^n)')dt \end{aligned}$$

推论 4.13.9 (Green 定理). *令 D 为 $\mathbb{R}^2$ 的紧 ∂-子流形.f,g 是 $\mathbb{R}^2$ 内含 D 一个开集上的 C^1 函数. 取 D 方向为 $\mathbb{R}^2$ 标准方向, 则*

$$\int_{\partial D}(fdx+gdy) = \iint_D(\partial_x g-\partial_y f)dxdy$$

我们接下来讲散度定理.

令 V 为 n 维实内积空间, 则有同构 (Riesz 表示定理)$\Phi: V\to V^*$ 满足 $\Phi(v)=\langle v,\cdot\rangle$. 取 $0\leqslant k\leqslant n$. 注意 $\Lambda^k V$ 是 $\otimes^k V$ 子空间. $\otimes^k V$ 有内积, 使得若 $e_1,\cdots,e_n\in V$ 是 V 标准正交基, 则 $\{e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_k}:1\leqslant i_1,\cdots,i_k\leqslant n\}$ 是 $\otimes^k V$ 标准正交基,$\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}:1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n\}$ 是子空间 $\Lambda^k V$ 一组基, 且不难知 $\left\{\frac{1}{\sqrt{k!}}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}:1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n\right\}$ 是 $\Lambda^k V$ 标准正交基.

约定: 取 $\Lambda^k V$ 上内积为使 $\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}:1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n\}$ 为一组标准正交基 (若 $e_1,\cdots,e_n$ 是 V 标准正交基)

定义 4.13.10. 令 U,V 为有限维线性空间. 双线性映射 $\varphi: U\times V\to\mathbb{R}$ 称为**完美配对 (perfect pairing)** 若线性映射 $U\to V^*, u\mapsto\varphi(u,\cdot)$ 是线性同构. 注意其转置是 $V\to U^*, v\mapsto\varphi(v,\cdot)$. 故完美配对的定义关于 U,V 对称.

引理 4.13.11. 令 V 为 n 维内积空间且取定方向. 令 $\omega\in\Lambda^n V$ 为此方向下的体积形式. 取 $0\leqslant k\leqslant n$, 则 $\Lambda^k V\times\Lambda^{n-k}V\to\mathbb{R}, (\alpha,\beta)\mapsto\dfrac{\alpha\wedge\beta}{\omega}$ 是完美配对.

证明: $\dim\Lambda^k V=\begin{pmatrix} n\\ k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n\\ n-k\end{pmatrix}=\dim\Lambda^{n-k}V$. 只需证

$$\Lambda^k(V)\to\Lambda^{n-k}(V)^*, \alpha\mapsto(\alpha,\beta)=\frac{\alpha\wedge\beta}{\omega}$$

是单射. 令 $e_1,\cdots,e_n$ 为 V 一组基,$\alpha=\sum\limits_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} a_{i_1\cdots i_k}\cdot e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}$. 若 $\forall\beta\in\Lambda^{n-k}(V)^*$ 有 $\alpha\wedge\beta=0$, 则取 $j_1<\cdots<j_{n-k}\in\{1,\cdots,n\}\setminus\{i_1,\cdots,i_k\}, \beta=e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_{n-k}}$ 知 $a_{i_1\cdots i_k}=0$. □

定义 4.13.12. 令 V 为定向内积空间,ω 为 $\Lambda^n V$ 体积形式. 线性同构 $\Lambda^{n-k}V\to(\Lambda^k V)^*, \gamma\mapsto\dfrac{\cdot\wedge\gamma}{\omega}$ 的逆映射复合上线性同构 $\Phi:\Lambda^k V\to(\Lambda^k V)^*, \beta\mapsto\langle\cdot,\beta\rangle$ 得到的同构

$$*:\Lambda^k V\to\Lambda^{n-k}V$$

称为 **Hodge∗-算子**. 它由关系 $\alpha\wedge*\beta=(\alpha,\beta)\omega$ 刻画.($\forall\alpha,\beta\in\Lambda^k V$)

例子. 在 $\mathbb{R}^n$ 中,$*(e_1\wedge\cdots\wedge e_k)=e_{k+1}\wedge\cdots\wedge e_n$. 一般地,$*$ 可由如下计算:

命题 4.13.13. 令 $e_1,\cdots,e_n$ 为 V 一组标准正交基且 $e_1\wedge\cdots\wedge e_n$ 给出了 V 的方向, 则

$$*(e_1\wedge\cdots\wedge e_k)=e_{k+1}\wedge\cdots\wedge e_n$$

特别地, 回忆 $\Lambda^0 V=\mathbb{R}$, 我们有 $*1=e_1\wedge\cdots\wedge e_n, *(e_1\wedge\cdots\wedge e_n)=1$. 更一般地, 若 $1\leqslant i_1,\cdots,i_k\leqslant n, 1\leqslant j_1,\cdots,j_{n-k}\leqslant n, n=\{i_1,\cdots i_k\}\cup\{j_1,\cdots,j_{n-k}\}$, 则

$$*(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k})=\pm e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_{n-k}}$$

$\pm$ 由 $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}\wedge e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_{n-k}}$ 方向决定.

回忆 $\Phi:\Lambda^k V\to(\Lambda^k V)^*$.

例子. 令 $e_1,\cdots,e_n$ 为 V 标准坐标基且 $e_1\wedge\cdots\wedge e_n$ 给出 V 方向. 令 $\check{e^1},\cdots,\check{e^n}$ 为对偶标准正交基. 令 $v\in V$, 则 $v=\sum\limits_i\langle v,e_i\rangle e_i$, 故 $\Phi v=\sum\limits_i\langle v,e_i\rangle\check{e^i}$. 由此可知

$$\begin{aligned}*\Phi v&=\sum_{i=1}^n(-1)^{i+1}\langle v,e_i\rangle\check{e^1}\wedge\cdots\wedge\check{e^{i-1}}\wedge\check{e^{i+1}}\wedge\cdots\wedge\check{e^n}\\&=\langle v,e_1\rangle\check{e^2}\wedge\cdots\wedge\check{e^n}+\check{e^1}\wedge(\cdots)\end{aligned}$$

推论 4.13.14. 令 H 为 V 的 $n-1$ 维子空间,$\nu\in V$ 为 H 的单位法向量 (即 $\langle\nu,V\rangle=1$ 且 $\langle\nu,H\rangle=0$).H 方向由 ν 决定 (故 $\Lambda^{n-1}H$ 中体积形式 ξ 满足 $\nu\wedge\xi$ 是 H 正方向). 令 $\omega_H\in\Lambda^{n-1}H^*$ 为体积形式. 令 $\iota:H\to V$ 为嵌入, 诱导了 $\iota^{\mathrm{T}}:V^*\to H^*$, 从而 $\iota^{\mathrm{T}}:\Lambda^{n-1}V^*\to\Lambda^{n-1}H^*$. 则 $\forall u\in V$ 有 $\iota^{\mathrm{T}}(*\Phi u)=\langle u,\nu\rangle\omega_H$.

证明: 前一例中, 取 V 标准正交基 $e_1, \cdots, e_n$ 使 $e_1 = \nu$(从而 $H = \operatorname{span}(e_2, \cdots, e_n)$), 则 $\Lambda^{n-1}H$ 体积形式为 $e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$. 故 $\Lambda^{n-1}H^*$ 体积形式为 $\omega_H = \check{e^2} \wedge \cdots \wedge \check{e^n}$, 准确来说

$$\omega_H = \iota^{\mathrm{T}}\check{e^2} \wedge \cdots \wedge \iota^{\mathrm{T}}\check{e^n}$$

由前一例,$*\Phi(u) = \langle u, e_1\rangle \check{e^2} \wedge \cdots \wedge \check{e^n} + \check{e^1} \wedge (\cdots)$, 以及 $\iota^{\mathrm{T}}\check{e^1} = 0$ 知 $\iota^{\mathrm{T}}(*\Phi u) = \langle u, e_1\rangle \omega_H$. □

定义 4.13.15. 令 M 为定向 ∂-Riemann 流形. 则 $* : \Lambda_p^k M \to \Lambda_p^{n-k} M (\forall p \in M)$ 给出了 M 的 Borel/C^r 的 k-形式与 $(n-k)$-形式之间的 ($C^\infty(M, \mathbb{R})$-线性的) 一一对应.

例子. $\mathbb{R}^3$ 中

$$*(f dx + g dy + h dz) = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy$$

$$*(f dx \wedge dy + g dy \wedge dz + h dz \wedge dx) = f dz + g dx + h dy$$

推论 4.13.16. *令 N 为 n 维定向 Riemann 流形,M 为定向 $n-1$ 维子流形,$\nu : p \in M \mapsto T_pN$ 为 M 上 C^∞ 的单位法向量场. 令 M 方向由 ν 定义. 令 X 为 M 在 N 某邻域上的 Borel 向量场, 则*

$$\int_M *\Phi X = \int_M \langle X, \nu\rangle \, dV$$

把 N 换成 n 维 ∂-定向 Riemann 流形,$M = \partial N$, 则结论仍成立.

证明: 令 $\omega_M : M \to \Lambda^{n-1}T^*M$ 为 M 的体积形式, 则

$$\int_M *\Phi X = \int_M \frac{\iota^*(*\Phi X)}{\omega_M} dV$$

这里 $\iota : M \to N$ 是嵌入映射. 前一推论应用到 $d\iota : T_pM \to T_pN$ 及其转置 $\iota^* : T_p^*N \to T_p^*M$ 得

$$\iota^*(*\Phi X) = \langle X, \nu\rangle \omega_M$$

或 $*\Phi X|_M = \langle X, \nu\rangle \omega_M$. □

注记. 类似地, 若 C 是 N 的一维定向子流形,$\nu : p \in C \to T_pC \subset T_pN$ 满足 $\forall p \in C$ 有 ν_p 正向且 $\langle \nu_p, \nu_p\rangle = 1$ 则 $\displaystyle\int_C \Phi X = \int_C \langle X, \nu\rangle \, dV_c$.

定义 4.13.17. 令 M 为可定向 ∂-Riemann 流形.X 是 M 上 C^1-向量场, 则 X 的**散度** $\operatorname{div} X$ 是连续函数, 定义为 $d * \Phi X = (\operatorname{div} X) \cdot M$ 的体积形式.

例子. 令 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 开子集,X 是 Ω 上 C^1 向量场,$X = \displaystyle\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial X^i}$, 则 $\operatorname{div} X = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial X^i} X^i$.

定理 4.13.18 (散度定理)**.** *令 M 为紧定向 ∂-Riemann 流形.X 是 M 上 C^1-向量场. 令 $\nu : \partial M \to TM$ 为 ∂M 的方向向外 (相较于 $\operatorname{Int} M$) 的单位法向量场. 则*

$$\int_{\partial M} \langle X, \nu\rangle \, dV_{\partial M} = \int_M \operatorname{div} X dV_M$$

证明: 由前一推论,

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \langle X, nu\rangle \, dV_{\partial M} &= \int_{\partial M} *\Phi X \\ &\overset{Stokes}{=} \int_M d(*\Phi X) = \int_M \operatorname{div} X \cdot dV_M \end{aligned}$$

□

问题 4.13.19. *令 N 为 3 维定向 Riemann 流形.M 是 N 的 2 维定向紧 ∂-子流形. 令 X 为 M 上 C^1 的向量场. 定义 $\operatorname{curl} X$ 为 (唯一) 满足 $d\Phi X = *\Phi \operatorname{curl} X$ 的向量场. 从而 $\operatorname{curl} X = \Phi^{-1} * d\Phi X$ (注: 若 $\alpha \in \Lambda^k(V), \dim V = n$, 则 $**\alpha = (-1)^{k(n-k)}\alpha$). 证明经典 Stokes 定理:*

$$\int_{\partial M} \langle X, \iota \rangle \, dV_{\partial M} = \int_M \langle \operatorname{curl} X, \nu \rangle \, dV_M$$

这里 ν 是给出 M 方向的单位法向量场,ι 是给出 ∂M 方向的单位切向量场.

4.14 de Rham 上同调引论

定义 4.14.1. 令 M 为 ∂-流形,$k \in \mathbb{Z}$. 令 $\Omega^k(M) = \{C^\infty\text{的}k\text{-形式}\omega : M \to \Lambda^k M\}$. 这里 $\Omega^{<0}(M)$ 定义为 0. 则 $d = d^k : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ 为外微分. 我们把

$$(\Omega(\dot{M}), \dot{d}) = \cdots \longrightarrow C^{k-1}(M) \xrightarrow{d^k} C^k(M) \xrightarrow{d^{k+1}} C^{k+1} \longrightarrow \cdots$$

称为**上链复形 (cochain complex)**. 意为 $\forall k$ 有 $d^{k+1} \circ d^k = 0$. 我们称 $\omega \in \Omega^k(M)$ 是 **closed$k$-form** 若 $d\omega = 0$. 称 $\omega \in \Omega^k(M)$ 为 **exact$k$-form** 若 $\exists \eta \in \Omega^{k-1}(M)$ 使 $\omega = d\eta$. 显然 exact $\Longrightarrow$ closed. 定义 M 的**k 阶 de Rham 上同调**为

$$H^k_{DR}(M) = \frac{\ker(\Omega^k(M) \xrightarrow{d^k} \Omega^{k+1}(M))}{\operatorname{Im}(\Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{d^{k-1}} \Omega^k(M))}$$

以下简便起见, 记 H^k_{DR} 为 H^k.

命题 4.14.2. *若 $F : M \to N$ 为 ∂-流形的光滑映射, 则 $F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ 诱导了良定义的 $F^* : H^k(N) \to H^k(M)$.*

证明: 由 $F^* d = dF^*$ 易得. □

注记. 若 $F : M \to N, G : N \to P$ 光滑, 则 $G^* : H^k(P) \to H^k(N)$ 与 $F^* : H^k(N) \to H^k(M)$ 复合 $F^* \cdot G^*$ 等于 $(G \circ F)^*$.

命题 4.14.3. *若 M 是连通 ∂-流形, 则 $H^0(M) \cong \mathbb{R}$.*

证明: d^{-1} 是零映射. 故 $H^0(M) = \ker(d^0 : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \Omega^1(M))$. 我们证明

$$\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})\text{有}df = 0 \Longleftrightarrow f\text{常值}$$

从而 $H^0(M) = \{M\text{上常值函数}\} \cong \mathbb{R}$.

"$\Longleftarrow$" 显然. "$\Longrightarrow$" $\forall p, q \in M$, 因为 M 连通且任意 ∂-流形局部道路连通, 故 M 道路连通, 故存在分段 C^∞ 的 $\gamma : [0,1] \to M$ 使 $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$. 则,

$$f(q) - f(p) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \int_0^1 (f \circ \gamma)' dt = \int_0^1 d(f \circ \gamma) = \int_0^1 \gamma^* df = 0$$

□

命题 4.14.4. 若 $\dim M = n$, 则 $\forall k > n$ 有 $H^k(M) = 0$.

证明: 若 $k > n$ 则 $\Lambda^k TM = 0$, 故 $\Omega^k(M) = 0$. $\square$

定义 4.14.5. 令 M 为紧无边的定向 n 维流形. 则

$$\int_M : \omega \in \Omega^n(M) \mapsto \int_M \omega \in \mathbb{R}$$

给出了良定义的线性映射 $\int_M : H^n(M) \to \mathbb{R}$. 这是因为若 $\omega = d\eta, \eta \in H^{n-1}(M)$, 则 $\int_M \omega = \int_{\partial M} \eta = 0$.

推论 4.14.6. 若 M 是紧的不带边的定向 n 维流形, 则 $\dim H^n(M) \geqslant 1$.

证明: $\int_M : H^n(M) \to \mathbb{R}$ 非零. 取 M 的体积形式 ω 则 $d\omega = 0$ 但 $\int_M \omega > 0$. $\square$

引理 4.14.7. 令 M 为紧定向 n 维 ∂-流形,$\iota : \partial M \to M$ 为嵌入. 则 $\iota^* : H^{n-1}(M) \to H^{n-1}(\partial M)$ 和 $\int_{\partial M} : H^{n-1} \to \mathbb{R}$ 的复合 $\int_{\partial M} \iota^* : H^{n-1}(M) \to \mathbb{R}$ 为零.

证明: 取 $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ 使 $d\omega = 0$. 则

$$\int_{\partial M} \iota^* \omega = \int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega = 0$$

$\square$

推论 4.14.8. 令 M 为紧定向 n 维 ∂-流形. 则不存在 M 到 ∂M 的光滑**收缩** ***(retraction)***, 即不存在光滑映射 $\varphi : M \to \partial M$ 使 $\varphi|_{\partial M} = \mathrm{id}_{\partial M}$.

证明: 令 $\iota : \partial M \to M$ 为嵌入. 若 $\varphi : M \to \partial M$ 是光滑收缩, 考虑

$$H^{n-1}(\partial M) \xrightarrow{\varphi^*} H^{n-1}(M) \xrightarrow{\iota^*} H^n(\partial M) \xrightarrow{\int_{\partial M}} \mathbb{R}$$

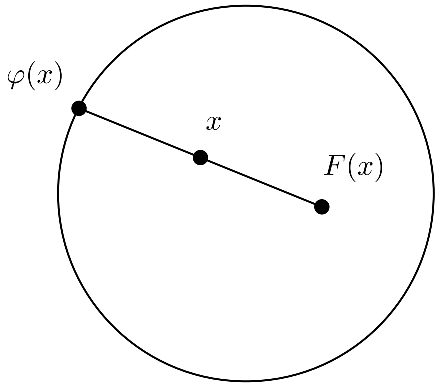
则 $int_{\partial M} \circ \iota^* = 0$, 故

$$\int_{\partial M} = \int_{\partial M} \circ (\mathrm{id}_{\partial M})^* = \int_{\partial M} \circ \iota^* \circ \varphi^* : H^{n-1}(\partial M) \to \mathbb{R}$$

是零映射. 矛盾! $\square$

定理 4.14.9 (Brower 不动点定理)**.** 令 B^n 为 $\mathbb{R}^n$ 中闭单位球.$F : B^n \to B^n$ 连续. 则 F 至少存在一个不动点.

证明: **Step 1:** 先假设 F 光滑. 若 F 无不动点, 则 $\varphi : B^n \to \partial B^n, \forall x \in B^n, \varphi(x)$ 是以 $F(x)$ 为起点穿过 x 的射线与 ∂B^n 的交点, 则 φ 是 C^∞ 收缩, 不可能.



Step 2: 只假设 F 连续. 令 $\mathcal{E}=\inf_{x\in B^n}\|x-F(x)\|>0$. 由 Weierstrass 逼近定理,$\forall\delta>0$, 存在 C^∞ 的 $G:B^n\to\mathbb{R}^n$ 使 $\sup_{x\in B^n}\|F(x)-G(x)\|\leqslant\delta$. 特别地,$\|G(x)\|\leqslant 1+\delta$. 令 $K(x)=(1+\delta)^{-1}G(x)$, 故

$$\|F(x)-K(X)\|\leqslant\delta+(1-\frac{1}{1+\delta})<2\delta$$

故 $\|x-K(x)\|\geqslant\varepsilon-2\delta>0$(当 $\delta<\frac{\varepsilon}{2}$). 故 $\delta<\frac{\varepsilon}{2}$ 时 $G:B^n\to B^n$ 光滑且无不动点. 矛盾. □

定义 4.14.10. 令 $F_0,F_1:M\to N$ 为 ∂-流形的 C^∞ 映射. 若存在 C^∞ 映射,

$$K:[0,1]\times M\to N使K(0,\cdot)=F_0,K(1,\cdot)=F_1$$

则称 K 是**C^∞ 同伦映射**,F_0,F_1 是 C^∞-同伦的, 并记 $F_0\simeq F_1$. 同伦关系是等价关系.

注记. $[0,1]\times M$ 的 C^∞ 结构局部地由 $[0,1]\times\mathbb{H}^n$ 给出, 从而由 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 给出.

定义 4.14.11. ∂-流形 M,N 称为**(C^∞-) 同伦等价**, 若存在 C^∞ 的 $F:M\to N,G:N\to M$ 使

$$G\circ G\simeq\mathrm{id}_M,F\circ G\simeq\mathrm{id}_N$$

定义 4.14.12. ∂-流形 M 称为**(C^∞-) 可收缩**, 若存在 C^∞ 的 K,

$$K:[0,1]\times M\to M使K(0,\cdot)=\mathrm{id}_M,K(1,\cdot)的像为一个点\{p\}(p\in M)$$

令 $F:\{p\}\to M,p\mapsto M,G:M\to\{p\},x\mapsto p$, 则 $G\circ F=\mathrm{id}_{\{p\}},F\circ G=K(1,\cdot)$ 与 $\mathrm{id_M}$ 同伦. 从而 M 与 $\{p\}$ 同伦等价.

接下来的主要目标是:

定理 4.14.13 (同伦不变定理)**.** 令 $F_0,F_1:M\to N$ 为 ∂-流形的同伦的 C^∞ 映射. 则 $\forall k,F_0^*$ 与 $F_1^*:H^k(N)\to H^k(M)$ 相等.

推论 4.14.14. 若 $F:M\to N,G:N\to M$ 满足 $G\circ F\simeq\mathrm{id}_M,F\circ G\simeq\mathrm{id}_N$, 则 $F^*:H^k(N)\to H^k(M)$ 是线性同构, 其逆映射为 $G^*:H^k(M)\to H^k(N)$.

推论 4.14.15 (Poincaré 引理)**.** 若 ∂-流形 M 是 C^∞ 可收缩的, 则 $\dim H^k(M)=\delta_{k,1}$.

同伦不变定理的证明: 令 $K:[0,1]\times M\to N$ 光滑,$K(0,\cdot)=F_0, J(1,\cdot)=F_1,\omega\in\Omega^k(N)$. 假设 $d\omega=0$. 要证 $F_1^*\omega-F_0^*\omega$ 是 exact 的. 令 $\widetilde{\omega}=K^*\omega$, 则 $d\widetilde{\omega}=dK^*\omega=K^*d\omega=0$, 而 $F_1^*-F_0^*=\widetilde{\omega}|_{1\times M}-\widehat{\omega}|_{0\times M}$. 因此只需证:

引理 4.14.16 (引理 A)**.** *令 M 为 ∂-流形,$\omega\in\Omega^k([0,1]\times M)$ 且 $d\omega=0$. 则 $\exists\eta\in\Omega^{k-1}(M)$ 使 $\omega|_{1\times M}-\omega|_{0\times M}=d\eta$.*

定义 4.14.17. 对任意 n 维带角流形 M, 定义 $\mathfrak{I}:\Omega^k([0,1]\times M)\to\Omega^{k-1}(M)$ 如下. 令 $\omega\in\Omega^k([0,1]\times M)$,$t:[0,1]\to[0,1],x\mapsto x,(U,\varphi^1,\cdots,\varphi^n)$ 是 U 坐标卡.

$$\omega=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{k-1}\leqslant n}\omega_{i_1\cdots i_{k-1}}dt\wedge d\varphi^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\varphi^{i_{k-1}}+\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n}\widetilde{\omega}_{j_1,\cdots,j_k}d\varphi^{j_1}\wedge\cdots\wedge d\varphi^{j_k}$$

这里 $\omega_\bullet,\widetilde{\omega_\bullet}\in C^1([0,1]\times U)$. 记 $\int_0^1\omega_{i_1\cdots i_{k-1}}dt:x\in U\to\int_0^1\omega_{i_1\cdots{k-1}}(t,x)dt$. 则

$$\mathfrak{I}\omega|_U=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{k-1}\leqslant n}\left(\int_0^1\omega_{i_1\cdots i_{k-1}}dt\right)d\varphi^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\varphi^{i_{k-1}}$$

不难验证此定义与坐标卡选取无关, 故可全局地定义.

注记. 对于非 ∂-流形的带角流形, 我们主要关心的例子是由 n 个线性无关向量张成的平行多边形的情况.

注记. $\mathfrak{I}\omega$ 有一个更坐标无关的定义方式.

注意 $\forall(s,p)\in[0,1]\times M,\omega_{(s,p)}$ 可看作反对称线性映射 $T_s\mathbb{R}\bigotimes^{k-1}T_pM\to\mathbb{R}$ 定义 **interior product**

$$\frac{\partial}{\partial t}\lrcorner\omega|_{(s,p)}:\bigotimes^{k-1}T_pM\to\mathbb{R},\xi\mapsto\omega\left(\frac{\partial}{\partial t}\otimes\xi\right)|_{(s,p)}$$

则 $\frac{\partial}{\partial t}\lrcorner\omega|_{(s,p)}\in\Lambda^{k-1}T_pM$. 能够验证

$$\mathfrak{I}\omega|_p=\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial t}\lrcorner\omega|_{(s,p)}\right)ds$$

我们不会用到这个定义, 我们只会用命题 B,C 作为 $\mathfrak{I}\omega$ 的等价刻画方式.

命题 4.14.18 (命题 B)**.** *令 M 为 C^∞ 流形,N 为带角 C^∞ 流形, 令 $F:N\to M$ 为 C^∞ 映射. 则以下图交换.*

$$\begin{array}{ccc}\Omega^k([0,1]\times M) & \xrightarrow{\mathfrak{I}} & \Omega^{k-1}(M)\\ \big\downarrow{\scriptstyle(\mathrm{id}\times F)^*} & & \big\downarrow{\scriptstyle F^*}\\ \Omega^k([0,1]\times N) & \xrightarrow{\mathfrak{I}} & \Omega^{k-1}(N)\end{array}$$

证明: 选取 M 上坐标卡计算可得. □

定义 4.14.19. 若 M,N 为定向的 m,n 维带角流形, 则带角流形 $M\times N$ 方向如下: 取 M 上 m 形式 ω 处处非零且给出 M 方向,N 上 n 形式 η 处处非零且给出 N 方向, 则 $\omega\wedge\eta$ 给出 $M\times N$ 方向.

注记. 我们有 $\partial(M\times N)=\partial M\times N+(-1)^m M\times\partial N$. 只需对 M 形如 $\{(x_1,\cdots,x_m):x_1,\cdots,x_k\geqslant 0\}$ 开子集,N 形如 $\{(y_1,\cdots,y_n):y_1,\cdots,y_l\geqslant 0\}$ 开子集验证.

命题 4.14.20 (命题 C)**.** *令 N 为 $k-1$ 维紧定向带角流形,$\omega\in\Omega^k([0,1]\times N)$, 则 $\displaystyle\int_N \mathcal{I}\omega=\int_{[0,1]\times N}\omega$.*

证明: 由单位分解化为 $N=\{(x_1,\cdots,x_{k-1}):x_1,\cdots,x_l\geqslant 0\}$ 且 ω 有紧支集的情况. 具体计算可得. □

注记. 若 M 是 $\mathbb{R}^n$ 开子集,ω 是 M 上连续 k-形式.$v_1,\cdots,v_k\in T_pM\cong\mathbb{R}^n$. 则若 $v_1,\cdots,v_k$ 线性相关, 则 $\omega(v_1\otimes\cdots\otimes v_k)=0$. 若线性无关, 令

$$N_\varepsilon=p+\{t_1v_1+\cdots+t_kv_k:0\leqslant t_1,\cdots,t_k\leqslant\varepsilon\}$$

则 $\omega(v_1\otimes\cdots\otimes v_k)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{1}{\varepsilon^k}\cdot\displaystyle\int_{N_\varepsilon}\omega$. 故 ω 取值由其在平行多面体上积分决定.

引理 A 由如下命题立即得:

命题 4.14.21. *令 M 为 C^∞ 带角流形,$\omega\in\Omega^k([0,1]\times M)$, 有*

$$\omega|_{1\times M}-\omega|_{0\times M}=d\mathcal{I}\omega+\mathcal{I}d\omega$$

准确地说, 令

$$\iota_0:M\to[0,1]\times M, x\mapsto(0,x)$$

$$\iota_1:M\to[0,1]\times M, x\mapsto(1,x)$$

则 $\iota_1^*\omega-\iota_0^*\omega=d\mathcal{I}\omega+\mathcal{I}d\omega$.

证明: 只需对 M 每点邻域验证即可, 而 $\{(x_1,\cdots,x_n):x_1,\cdots,x_l\geqslant 0\}$ 上 C^∞ 函数/形式总能局部扩张成 $\mathbb{R}^n$ 上 C^∞ 函数/形式. 故不妨假设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 开子集,$k\leqslant n$. 只需对任意 $p\in M$ 以及足够小的线性无关 $v_1,\cdots,v_k\in T_pM\cong\mathbb{R}^n$ 证明若

$$N=p+\{t_1v_1+\cdots+t_kv_k:0\leqslant t_1,\cdots,t_k\leqslant 1\}$$

则

$$\int_{1\times N}\omega-\int_{0\times N}\omega=\int_N d\mathcal{I}\omega+\int_N\mathcal{I}d\omega \tag{$*$}$$

由命题 B, 若 $\iota:N\to M$ 是嵌入映射,$\lambda=(\mathrm{id}\times\iota)^*\omega$, 则 $d\mathcal{I}=d\iota^*\mathcal{I}\omega=\iota^*d\mathcal{I}\omega$,

$$\mathcal{I}d\lambda=\mathcal{I}(\mathrm{id}\times\iota)^*\omega=\iota^*\mathcal{I}\omega$$

即 $d\mathcal{I}\lambda=d\mathcal{I}\omega|_N,\mathcal{I}d\lambda=\mathcal{I}d\omega|_N$, 故 $(*)$ 等价

$$\int_{1\times N}\lambda-\int_{0\times N}\lambda=\int_N d\mathcal{I}\lambda+\int_N\mathcal{I}d\lambda \tag{$**$}$$

$\lambda \in C^1([0,1] \times N)$. 由命题 C,

$$\begin{aligned}
\int_N \mathcal{I} d\lambda &= \int_{[0,1]\times N} d\lambda = \int_{\partial([0\times 1]\times N)} \lambda \\
&= \int_{\partial[0,1]\times N} \lambda - \int_{[0,1]\times\partial N} \lambda \\
&= \int_{1\times N} \lambda - \int_{0\times N} \lambda - \int_{\partial N} \mathcal{I}\lambda \\
&= \int_{1\times N} \lambda - \int_{0\times N} \lambda - \int_N d\mathcal{I}\lambda
\end{aligned}$$

$(**)$ 得证. $\square$

注记. 命题 C 告诉我们 $\omega \mapsto \mathcal{I}\omega$ 是 $N \mapsto [0,1] \times N$ 的对偶, 从而 $\omega|_{1\times N} - \omega|_{0\times N} = d\mathcal{I}\omega + \mathcal{I}d\omega$ 是 $1 \times N - 0 \times N = \partial([0,1] \times N) + [0,1] \times \partial N$ 的对偶. 这是以上证明的核心思想.

同伦不变定理证明完成. 我们也有:

定理 4.14.22. *令 M, N 为 ∂-流形,$K : [0,1] \times M \to N$ 为 C^∞ 映射, 令*

$$\mathcal{J} : \Omega^{\dot{}}(N) \to \Omega^{-1\dot{}}(M), \mathcal{J}\omega = \mathcal{I}K^*\omega$$

令 $F_1 = K(1,\cdot) : M \to N, F_0 = K(0,\cdot) : M \to N$, 则

$$F_1^* - F_0^* = d\mathcal{J} + \mathcal{J}d : \Omega^{\dot{}}(N) \to \Omega^{\dot{}}(M)$$

成立

$$\begin{tikzcd}
& \Omega^k(N) \arrow[r, "d"] \arrow[dl, "\mathcal{J}"'] \arrow[d, dashed, "F_1^*-F_0^*"] & \Omega^{k+1}(N) \arrow[dl, "\mathcal{J}"] \\
\Omega^{k-1}(M) \arrow[r, "d"] & \Omega^k(M) &
\end{tikzcd}$$

*在同调代数中, 满足 $F_1^* - F_0^* = d\mathcal{J} + \mathcal{J}d$ 的 $\mathcal{J} : \Omega^{\dot{}}(N) \to \Omega^{-1\dot{}}(M)$ 称为 F_0^* 和 F_1^* 之间的 **cochain homotopy**.*

证明: 由前一命题运用到 $K^*\omega$ 即得. $\square$

我们来给同伦不变定理一些初步应用:

引理 4.14.23. *令 S^n 为 n 维单位球面, 定义 antipodal map,$A : S^n \to S^n, x \mapsto x$. 若 n 是偶数, 则 A 不与 id_{S^n} 光滑同伦.*

证明: 令 $\omega = *(x^1dx^1 + \cdots + x^{n+1}dx^{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}x^i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^{n+1}$. 令 ν 为 S^n 上向外法向量场, 则

$$\int_{S^n} \omega = \int_{S^n} \langle X, \nu \rangle \, d\nu = \mathrm{vol}(S^n) > 0$$

这里 $X = x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + x^{n+1}\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}$. 令 $\eta = \omega|_{S^n}$. 若 $A \simeq \mathrm{id}_{S^n}$, 则由 $d\eta = 0$ 知 $\eta - A^*\eta = d\mu, \mu \in \Omega^{n-1}(S^n)$. 从而

$$\int_{S^n} (\eta - A^*\eta) = \int_{\partial S^n} \mu = 0$$

但易知 $A^*\eta = -\eta$(这里用到 n 是偶数). 故 $\int_{S^n} \eta = \int_{S^n} \omega = 0$. 矛盾! $\square$

定理 4.14.24. *令 n 为偶数,$F : S^n \to S^n$ 连续, 则存在 $x \in S^n$ 使 $F(x) = x$ 或 $F(x) = -x$.*

证明: 假设 $\forall x \in S^n$ 有 $F(x) \neq x, F(x) \neq -x$. 由多项式逼近, 存在 C^∞ 的 $G : S^n \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 使 $\left|\dfrac{\langle G(x), x\rangle}{\|G(x)\|}\right| < 1$ 对所有 $x \in S^n$ 成立. 故 $\dfrac{G(x)}{\|x\|} \neq \pm x$. 通过把 $F(x)$ 换成 $\dfrac{G(x)}{\|G(x)\|}$, 不妨假设 $F : S^n \to S^n$ 光滑且 $\forall x \in S^n$ 有 $F(x) \neq \pm x$.

$\forall x \in S^n$, 取 $\gamma(\cdot, x) : t \in [0, 2\pi] \to S^n$ 为匀速的大圆 (半径为 1) 运动, 且 $\gamma(0, x) = x.\gamma(t, x) = F(x)$ 若 t 是 S^n 上 x 到 $F(x)$ 最短距离. 则 $\gamma : [0, 2\pi] \times S^n \to S^n$ 光滑.

$$\gamma(0, \cdot) = \mathrm{id}_{S^n}, \gamma(\pi, \cdot) = A$$

故 A 与 id_{S^n} 同伦. 矛盾! □

推论 4.14.25 (毛球定理)**.** *若 n 是偶数,X 是 S^n 上连续向量场, 则 X 有零点.*

证法 1: 把 X 看作函数 $X : S^n \to \mathbb{R}^n$. 故 $\forall p \in S^n$,p 与 $X(p)$ 垂直. 假设 X 处处非零, 则

$$F : S^n \to S^n, p \mapsto \frac{X(p)}{\|X(p)\|}$$

连续且 p 与 $F(p)$ 正交. 特别地,$F(p) \neq \pm p$. 不可能. □

证法 2: 通过光滑逼近, 不妨假设 X 光滑且 X 处处非零,$\forall p \in S^n$, 令

$$\gamma(t, p) = p \cos t + \frac{X_p}{\|X_p\|} \sin t$$

则 $\gamma(0, \cdot) = \mathrm{id}_{S^n}, \gamma(\pi, \cdot) = -\mathrm{id}_{S^n}$, 即 $\mathrm{id}_{S^n} \simeq -\mathrm{id}_{S^n}$. 矛盾! □